臺中區國立高級中學九十三學年度第二學期
大學入學指定科目第二次聯合模擬考

數學甲考科

試題編號：AU-40232
考試日期：94.02.21

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內作答，選擇題答錯均倒扣。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。
第貳部分作答於「答案卷」，請在規定之欄位作答，並於題號欄標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一)選擇題：只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 −，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單一選擇題，選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若第 10 題為多重選擇題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 1 與 3 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

(二)選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

祝考試順利

第壹部分：選擇題（76%）

一、單一選擇題（12%）

說明：第 1 至 2 題，每題選出一個最適當的選項，劃記於答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 2 分，倒扣到本大題之實得分數為零分為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 將矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & t & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 作列運算而得矩陣 $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -11t & 1-3t & 7t \\ 0 & 1 & 0 & 1-2t & 1-t & t \\ 0 & 0 & 1 & 4t & t & 1-3t \end{bmatrix}$，

   則 t 之值爲

   (1) 2

   (2) 4

   (3) 6

   (4) 8

2. 兩直線 L_1：$\begin{cases} x=2 \\ z=-3 \end{cases}$ 與 L_2：$x+2=y-2=z$，則 L_1、L_2 在平面 E：$x+y+z=0$ 上之正射影爲

   (1)兩相交直線

   (2)兩平行直線

   (3)兩重合直線

   (4)一線與線外一點

二、多重選擇題（48%）

說明：第 3 至 8 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零分為止。

3. 設 α、β 是方程式 $x^2-10x+m=0$ 之二根，α、γ 是方程式 $x^2+14x+3m=0$ 之二根，且 $m\neq 0$，則

(1) $\alpha=12$

(2) $\beta=-12$

(3) $\gamma=-36$

(4) $m=12$

4. $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}$，$\angle C=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{BC}$ 之中點爲 M，由 A 作 $\overline{BC}$ 之垂線交 $\overline{BC}$ 於 H，設 $\overline{MH}=5$，則

(1) $\tan B=\dfrac{3}{4}$

(2) $\overline{BC}=22$

(3) $\overline{AM}=13$

(4) $\sin\angle BAM=\dfrac{33}{65}$

5. 平面上相異四點 O、A、B、C，若 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，且 $\overline{OC}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 D，則下列何者正確？

(1) $\triangle OBC$ 的面積：$\triangle OAC$ 的面積$=3:2$

(2) $\triangle OAB$ 的面積：$\triangle ABC$ 的面積$=1:4$

(3) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}$

(4) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

6. 同樣大小的球 7 顆，分別標上 1、2、3、4、5、6、7 個號碼後，將其放入袋中，今由袋中任取一球，記下其號碼後再放回袋中，如此連續操作 k 次，令 P_k 表記錄至第 k 次時，所有號碼總和爲奇數的機率，則下列何者正確？

(1) $P_1=\dfrac{4}{7}$

(2) $P_2=\dfrac{25}{49}$

(3) $P_3=\dfrac{171}{343}$

(4) $P_k=-\dfrac{1}{7}P_{k-1}+\dfrac{4}{7}$

7. 某班某次段考數學成績低落，全班平均只有 36 分，標準差 4 分，最高分不超過 50 分，老師提出兩種加分方式：

方式 A：全班每人原始分數開根號乘以 10 後再加 10 分。

方式 B：全班每人原始分數乘以 $\frac{1}{2}$ 後再加 50 分。

下列敘述何者正確？

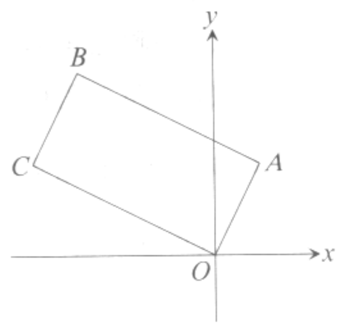
(1)若採方式 A，則全班的平均分數變爲 70 分

(2)若採方式 B，則全班的變異係數變小

(3)方式 B 的成績的四分位差比原成績的四分位差大

(4)若原成績與方式 A 成績的相關係數爲 r_1，原成績與方式 B 成績的相關係數爲 r_2，則 $|r_1| \leq |r_2|$

8. 矩形 $OABC$，其中 $O(0,0)$，$A(1,2)$，B、C 在第二象限，$\overline{OC}=2\overline{OA}$，設 $P(x,y)$ 爲矩形區域內任一點（包括矩形內部及邊界），則下列何者正確？



(1) C 點坐標爲 $(-4,3)$

(2) B 點坐標爲 $(-3,4)$

(3) $3x+2y$ 在 A 點產生最大值

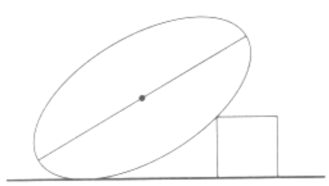
(4) $\frac{y}{x+6}$ 在 C 點產生最大值

三、選填題（16%）

說明：A、B 為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號（9 至 13）中標示答案，每一格完全答對得 8 分。答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若 $8^n x^2-2^n(2^n+1)x+1=0$ 之二根爲 α、β，令 $a_n=|\alpha-\beta|$，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=$ $\frac{⑨}{⑩}$。（表爲最簡分數）

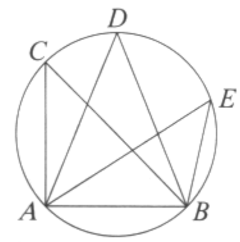
B. 一個橢圓形的藝術品，其長軸長爲 4，短軸長爲 2，以木塊將它墊高（如右圖），若其長軸與水平線夾 θ 角，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，則此時藝術品的高度爲 $\frac{\sqrt{⑪⑫⑬}}{5}$。



第貳部分：非選擇題（24%）

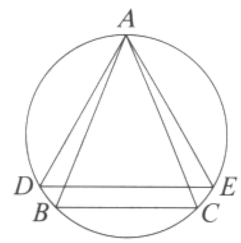
說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、(a)右圖㈠中，A、B、C、D、E 均在同一圓上，其中 $\overline{AD}=\overline{BD}$，則 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ABE$ 何者面積最大？______。（2分，只填答案）



圖㈠

(b)右圖㈡中，A、B、C、D、E 均在同一圓上，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}\neq\overline{BC}$，$\triangle ADE$ 為正三角形，則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 何者面積較大？______。（2 分，只填答案）



圖㈡

(c)由(a)、(b)，有一單位圓，其內接三角形以何種三角形面積最大？______。（2 分，只填數字答案）

⑴等腰三角形 ⑵正三角形 ⑶直角三角形

⑷銳角三角形 ⑸鈍直角三角形

(d)利用(c)的結果，求橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 內接三角形的最大面積。

（6 分，需寫出演算過程）

二、$\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a、b、c，令 $s=\frac{a+b+c}{2}$，

由海龍公式知：$\triangle ABC$ 的面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

試證明：$\triangle ABC$ 面積的最大值為 $\frac{\sqrt{3}}{9}s^2$。（12 分）

臺中區國立高級中學九十三學年度第二學期
大學入學指定科目第二次聯合模擬考

數學甲詳解

試題編號：AU-40232
考試日期：94.02.21

第壹部分

一、單一選擇題

1. (1)

【詳解】由矩陣A，B知矩陣$C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & t\\ 2 & 4 & 7\end{bmatrix}$與$D=\begin{bmatrix}-11t & 1-3t & 7t\\ 1-2t & 1-t & t\\ 4t & t & 1-3t\end{bmatrix}$互為逆矩陣

即$CD=I_3$

$C^{-1}=\begin{bmatrix}-22 & -5 & 14\\ -3 & -1 & 2\\ 8 & 2 & -5\end{bmatrix}$　$\therefore\ t=2$

2. (4)

【詳解】1° $L_1:\begin{cases}x=2\\ z=-3\end{cases}$與$E:x+y+z=0$相交於一點，且與$E$不垂直

$\therefore$ L_1在E之投影為一直線L_1'

2° $L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$與$E:x+y+z=0$垂直

$\therefore$ L_2在E之投影為一點，且不在L_1'上

由1°，2°知，兩直線在E上之正射影為一線與線外一點

二、多重選擇題

3. (2)(3)

【詳解】$\alpha^2-10\alpha+m=0$ ……①，$\alpha^2+14\alpha+3m=0$ ……②

②－① $\Rightarrow$ $24\alpha+2m=0$　$\therefore\ m=-12\alpha$

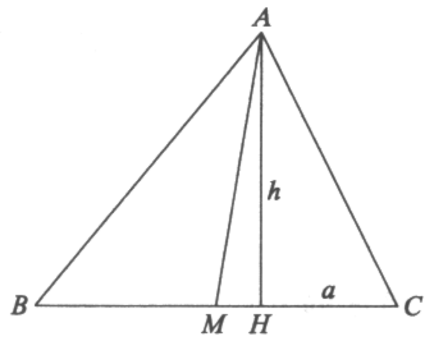
又根與係數知$\begin{cases}\alpha\beta=m\\ \alpha\gamma=3m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{m}{12}\cdot\beta=m\\ -\dfrac{m}{12}\cdot\gamma=3m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=-12\\ \gamma=-36\end{cases}$

$\beta=-12$代入$x^2-10x+m=0$中，得

$m=-264$，$\alpha=22$

4. (1)(2)(3)(4)

【詳解】$\angle B=\cos^{-1}\dfrac{4}{5}\ \Rightarrow\ \cos B=\dfrac{4}{5}\ \Rightarrow\ \tan B=\dfrac{3}{4}$



$\angle C=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \tan C=2$

設 $\overline{AH}=h$，$\overline{HC}=a\ \Rightarrow\ \overline{BH}=a+10$

$\tan B=\dfrac{3}{4}\ \Rightarrow\ \dfrac{h}{a+10}=\dfrac{3}{4}$ ……①

$\tan C=2\ \Rightarrow\ \dfrac{h}{a}=2\ \Rightarrow\ h=2a$ ……②

由①②得 $a=6$，$h=12\ \Rightarrow\ \overline{BC}=2a+10=22$

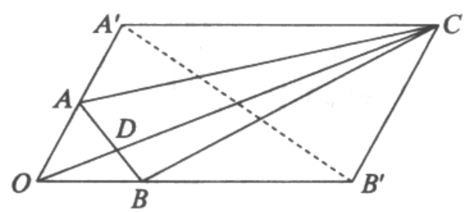
$\Rightarrow\ \overline{AM}=13$，$\overline{AB}=20$

$\cos\angle BAM=\dfrac{20^2+13^2-11^2}{2\times 20\times 13}=\dfrac{56}{65}$

$\therefore\ \sin\angle BAM=\dfrac{33}{65}$

5. (2)(3)

【詳解】取 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$



則 $OB'CA'$ 爲平行四邊形

(1) $\triangle OBC=\dfrac{1}{3}\triangle OB'C$，$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\triangle OA'C$

$\therefore\ \dfrac{\triangle OBC}{\triangle OAC}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=2:3$

(2) $\dfrac{\triangle OAB}{\triangle OA'B'}=\dfrac{1\times 1}{2\times 3}=\dfrac{1}{6}\quad \therefore\ \triangle OAB=\dfrac{1}{6}\triangle OA'B'$

$\triangle OAC+\triangle OBC=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\triangle OA'B'=\dfrac{5}{6}\triangle OA'B'$

$\therefore\ \triangle OAB:\triangle ABC=1:4$

(3)設 $\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OC}=t(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=2t\overrightarrow{OA}+3t\overrightarrow{OB}$

A，D，B 共線 $\quad\therefore\ 2t+3t=1\ \Rightarrow\ t=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}$

(4) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{5}(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

6. (1)(4)

【詳解】1，2，3，4，5，6，7 中有 3 個偶數，4 個奇數

任取一球爲奇數的機率爲 $\frac{4}{7}$

任取一球爲偶數的機率爲 $\frac{3}{7}$

(1) $P_1=\frac{4}{7}$

(2) $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{24}{49}$（奇＋偶或偶＋奇）

(3) $P_3=\frac{24}{49}\times\frac{3}{7}+(1-\frac{24}{49})\times\frac{4}{7}=\frac{72}{343}+\frac{100}{343}=\frac{172}{343}$

（前兩次和爲奇數，則第三次爲偶數或前兩次和爲偶數，則第三次爲奇數）

(4) $P_k=P_{k-1}\times\frac{3}{7}+(1-P_{k-1})\times\frac{4}{7}=-\frac{1}{7}P_{k-1}+\frac{4}{7}$

7. (2)(4)

【詳解】(1) $\because$ 方式 A 不爲線性變換 $\therefore$ 無法推知其平均分數

(2)方式 B 之平均 $=\frac{1}{2}\cdot 36+50=68$，標準差 $=4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore$ 方式 B 的變異係數 $=\frac{2}{68}\times 100\%$，比原始分數的變異係數 $=\frac{4}{36}\times 100\%$小

(3)方式 B 四分位差 $Q_{3(B)}-Q_{1(B)}=\frac{1}{2}(Q_{3(原)}-Q_{1(原)})$ $\therefore$ 較小

(4) $\because$ 原成績與方式 A 非線性 $\Rightarrow |r_1|\leq 1$，原成績與方式 B 爲線性

$\Rightarrow |r_2|=1$ $\therefore$ $|r_1|\leq|r_2|$

故選(2)(4)

8. (2)(3)

【詳解】(1)設 $A(1+2i)$

則 $C:(1+2i)\cdot 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=(1+2i)(2i)=-4+2i$

$\Rightarrow C(-4,2)$

(2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(1,2)+(-4,2)=(-3,4)$

(3)令 $3x+2y=k$，斜率 $-\frac{3}{2}$，$\overline{OC}$ 斜率 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $3x+2y$ 在 A 點產生最大值

(4) $\frac{y}{x+6}$ 表 (x,y) 與 $P(-6,0)$ 的斜率

$\overline{PC}$ 斜率 $\frac{2}{2}=1$，$\overline{PB}$ 斜率 $\frac{4}{3}$，$\overline{PA}$ 斜率 $\frac{2}{7}$

$\therefore$ $\frac{y}{x+6}$ 在 B 點產生最大值

故選(2)(3)

三、選填題

A. $\underline{\dfrac{2}{3}}$（⑨ $\underline{2}$　⑩ $\underline{3}$）

【詳解】$(2^n x-1)(4^n x-1)=0$

$$\begin{array}{ccc} 2^n x & & -1 \\ & \times & \\ 4^n x & & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow\ x=\dfrac{1}{2^n}$，$\dfrac{1}{4^n}\ \Rightarrow\ a_n=\left|\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{4^n}\right|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\right)+\cdots$$

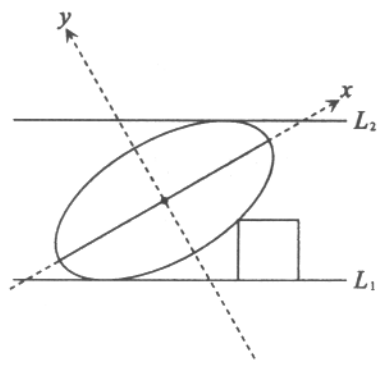
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

B. $\underline{\dfrac{\sqrt{208}}{5}}$（⑪ $\underline{2}$　⑫ $\underline{0}$　⑬ $\underline{8}$）

【詳解】取橢圓長軸爲 x 軸，中心爲 $(0,0)$



則橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

L_1，L_2 兩切線斜率爲 $-\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ L_1$，L_2 方程式爲 $y=-\dfrac{3}{4}x\pm\sqrt{4\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1}$

$\Rightarrow\ 3x+4y\pm2\sqrt{13}=0$

$\therefore$ 高度 $=d(L_1, L_2)$

$$=\frac{4\sqrt{13}}{5}$$

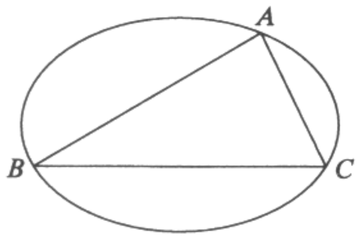
$$=\frac{\sqrt{208}}{5}$$

第貳部分

一、(a) $\triangle ABD$ (b) $\triangle ADE$（連 $\overline{BE}$，則 $\triangle ADE > \triangle ABE > \triangle ABC$） (c)⑵ (d) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

【詳解】(d)設 $\triangle ABC$ 內接於橢圓 Γ：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

則 $A(3\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$B(3\cos\beta,2\sin\beta)$，$C(3\cos\gamma,2\sin\gamma)$



$$\triangle ABC\text{面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3\cos\alpha & 2\sin\alpha & 1\\ 3\cos\beta & 2\sin\beta & 1\\ 3\cos\gamma & 2\sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=3\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$$

又 $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$ 表內接於單位圓的三角形面積

由(c) $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 面積 $\le\frac{9\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $\triangle ABC$ 最大面積爲 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

二、

【證明】$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

又 $s-a>0$，$s-b>0$，$s-c>0$

令 $(s-a)(s-b)(s-c)=T$

$\therefore$ $\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow$ $3s-(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{T}$

又 $a+b+c=2s$ $\therefore$ $s^3\ge 27T$ （6分）

「=」成立時，$(s-a)=(s-b)=(s-c)$，即 $a=b=c$，T 最大

$\therefore$ $(\frac{s}{3})^3\ge T$ $\Rightarrow$ $(\frac{s}{3})^{\frac{3}{2}}\ge\sqrt{T}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{(\frac{s}{3})^3}\ge\sqrt{T}$

$\Rightarrow$ $\sqrt{(\frac{s}{3})^3 s}\ge\sqrt{sT}$ （10分）

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{sT}\le\sqrt{\frac{s^4}{27}}=\frac{\sqrt{3}s^2}{9}$ （12分）