臺中區國立高級中學九十三學年度第二學期
大學入學指定科目第二次聯合模擬考

數學甲詳解

試題編號：AU-40232
考試日期：94.02.21

第壹部分

一、單一選擇題

1. (1)

【詳解】由矩陣 A，B 知矩陣 $C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & t\\ 2 & 4 & 7\end{bmatrix}$ 與 $D=\begin{bmatrix}-11t & 1-3t & 7t\\ 1-2t & 1-t & t\\ 4t & t & 1-3t\end{bmatrix}$ 互爲逆矩陣

即 $CD=I_3$

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}-22 & -5 & 14\\ -3 & -1 & 2\\ 8 & 2 & -5\end{bmatrix} \quad \therefore\ t=2$$

2. (4)

【詳解】1° $L_1:\begin{cases}x=2\\ z=-3\end{cases}$ 與 $E:x+y+z=0$ 相交於一點，且與 E 不垂直

$\therefore$ L_1 在 E 之投影爲一直線 L_1'

2° $L_2:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{1}$ 與 $E:x+y+z=0$ 垂直

$\therefore$ L_2 在 E 之投影爲一點，且不在 L_1' 上

由 1°，2° 知，兩直線在 E 上之正射影爲一線與線外一點

二、多重選擇題

3. (2)(3)

【詳解】$\alpha^2-10\alpha+m=0$ ……①，$\alpha^2+14\alpha+3m=0$ ……②

②－① $\Rightarrow$ $24\alpha+2m=0$ $\therefore$ $m=-12\alpha$

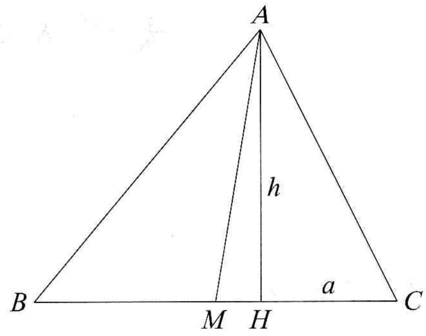
又根與係數知 $\begin{cases}\alpha\beta=m\\ \alpha\gamma=3m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\dfrac{m}{12}\cdot\beta=m\\ -\dfrac{m}{12}\cdot\gamma=3m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=-12\\ \gamma=-36\end{cases}$

$\beta=-12$ 代入 $x^2-10x+m=0$ 中，得

$m=-264$，$\alpha=22$

4. (1)(2)(3)(4)

【詳解】$\angle B=\cos^{-1}\dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos B=\dfrac{4}{5} \Rightarrow \tan B=\dfrac{3}{4}$



$\angle C=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos C=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan C=2$

設 $\overline{AH}=h$，$\overline{HC}=a \Rightarrow \overline{BH}=a+10$

$\tan B=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{h}{a+10}=\dfrac{3}{4}$ ……①

$\tan C=2 \Rightarrow \dfrac{h}{a}=2 \Rightarrow h=2a$ ……②

由①②得 $a=6$，$h=12 \Rightarrow \overline{BC}=2a+10=22$

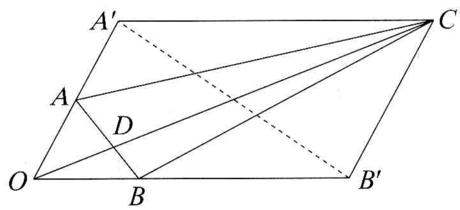
$\Rightarrow \overline{AM}=13$，$\overline{AB}=20$

$\cos\angle BAM=\dfrac{20^2+13^2-11^2}{2\times20\times13}=\dfrac{56}{65}$

$\therefore \sin\angle BAM=\dfrac{33}{65}$

5. (2)(3)

【詳解】取 $\overrightarrow{OA'}=2\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=3\overrightarrow{OB}$



則 $OB'CA'$ 為平行四邊形

(1) $\triangle OBC=\dfrac{1}{3}\triangle OB'C$，$\triangle OAC=\dfrac{1}{2}\triangle OA'C$

$\therefore \dfrac{\triangle OBC}{\triangle OAC}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=2:3$

(2) $\dfrac{\triangle OAB}{\triangle OA'B'}=\dfrac{1\times1}{2\times3}=\dfrac{1}{6} \quad \therefore \triangle OAB=\dfrac{1}{6}\triangle OA'B'$

$\triangle OAC+\triangle OBC=(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3})\triangle OA'B'=\dfrac{5}{6}\triangle OA'B'$

$\therefore \triangle OAB:\triangle ABC=1:4$

(3)設 $\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OC}=t(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=2t\overrightarrow{OA}+3t\overrightarrow{OB}$

A，D，B 共線 $\quad\therefore 2t+3t=1 \Rightarrow t=\dfrac{1}{5}$

$\therefore \overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}$

(4) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{5}(2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$

6. (1)(4)

【詳解】1，2，3，4，5，6，7 中有 3 個偶數，4 個奇數

任取一球爲奇數的機率爲 $\frac{4}{7}$

任取一球爲偶數的機率爲 $\frac{3}{7}$

(1) $P_1=\frac{4}{7}$

(2) $\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{24}{49}$（奇＋偶或偶＋奇）

(3) $P_3=\frac{24}{49}\times\frac{3}{7}+(1-\frac{24}{49})\times\frac{4}{7}=\frac{72}{343}+\frac{100}{343}=\frac{172}{343}$

（前兩次和爲奇數，則第三次爲偶數或前兩次和爲偶數，則第三次爲奇數）

(4) $P_k=P_{k-1}\times\frac{3}{7}+(1-P_{k-1})\times\frac{4}{7}=-\frac{1}{7}P_{k-1}+\frac{4}{7}$

7. (2)(4)

【詳解】(1)$\because$ 方式 A 不爲線性變換 $\therefore$ 無法推知其平均分數

(2)方式 B 之平均 $=\frac{1}{2}\cdot 36+50=68$，標準差 $=4\times\frac{1}{2}=2$

$\therefore$ 方式 B 的變異係數 $=\frac{2}{68}\times 100\%$，比原始分數的變異係數 $=\frac{4}{36}\times 100\%$小

(3)方式 B 四分位差 $Q_{3(B)}-Q_{1(B)}=\frac{1}{2}(Q_{3(\text{原})}-Q_{1(\text{原})})$ $\therefore$ 較小

(4)$\because$ 原成績與方式 A 非線性 $\Rightarrow$ $|r_1|\leq 1$，原成績與方式 B 爲線性

$\Rightarrow$ $|r_2|=1$ $\therefore$ $|r_1|\leq|r_2|$

故選(2)(4)

8. (2)(3)

【詳解】(1)設 $A(1+2i)$

則 C：$(1+2i)\cdot 2(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=(1+2i)(2i)=-4+2i$

$\Rightarrow$ $C(-4，2)$

(2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(1，2)+(-4，2)=(-3，4)$

(3)令 $3x+2y=k$，斜率 $-\frac{3}{2}$，$\overline{OC}$ 斜率 $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $3x+2y$ 在 A 點產生最大值

(4) $\frac{y}{x+6}$ 表 $(x，y)$ 與 $P(-6，0)$ 的斜率

$\overline{PC}$ 斜率 $\frac{2}{2}=1$，$\overline{PB}$ 斜率 $\frac{4}{3}$，$\overline{PA}$ 斜率 $\frac{2}{7}$

$\therefore$ $\frac{y}{x+6}$ 在 B 點產生最大值

故選(2)(3)

三、選填題

A. $\underline{\dfrac{2}{3}}$（⑨ $\underline{2}$　⑩ $\underline{3}$）

【詳解】$(2^n x-1)(4^n x-1)=0$

$$\begin{matrix} 2^n x & & -1 \\ & \times & \\ 4^n x & & -1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{1}{2^n}\,,\ \frac{1}{4^n}\ \Rightarrow\ a_n=\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{64}\right)+\cdots$$

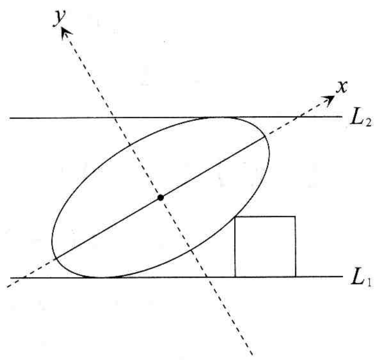
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

B. $\underline{\dfrac{\sqrt{208}}{5}}$（⑪ $\underline{2}$　⑫ $\underline{0}$　⑬ $\underline{8}$）

【詳解】取橢圓長軸為 x 軸，中心為 $(0,0)$



則橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

L_1，L_2 兩切線斜率為 $-\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ L_1，L_2 方程式為 $y=-\dfrac{3}{4}x\pm\sqrt{4\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+1}$

$\Rightarrow$ $3x+4y\pm2\sqrt{13}=0$

$\therefore$ 高度 $=d(L_1, L_2)$

$$=\frac{4\sqrt{13}}{5}$$

$$=\frac{\sqrt{208}}{5}$$

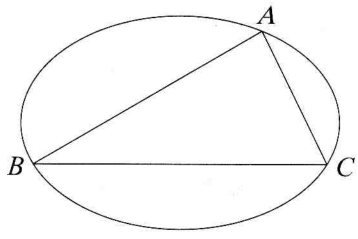
第貳部分

一、(a) $\triangle ABD$ (b) $\triangle ADE$（連 $\overline{BE}$，則 $\triangle ADE > \triangle ABE > \triangle ABC$） (c)(2) (d) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

【詳解】(d)設 $\triangle ABC$ 內接於橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

則 $A(3\cos\alpha，2\sin\alpha)$，$B(3\cos\beta，2\sin\beta)$，$C(3\cos\gamma，2\sin\gamma)$

$$\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3\cos\alpha & 2\sin\alpha & 1\\ 3\cos\beta & 2\sin\beta & 1\\ 3\cos\gamma & 2\sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$$



$$=3\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$$

又 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right|$ 表內接於單位圓的三角形面積

由(c) $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 1\\ \cos\beta & \sin\beta & 1\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1\end{vmatrix}\right| \le \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ $\triangle ABC$ 面積 $\le \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $\triangle ABC$ 最大面積為 $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

二、

【證明】$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

又 $s-a>0$，$s-b>0$，$s-c>0$

令 $(s-a)(s-b)(s-c)=T$

$\therefore\ \dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\ge\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\Rightarrow\ 3s-(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{T}$

又 $a+b+c=2s$ $\therefore\ s^3\ge 27T$ （6分）

「=」成立時，$(s-a)=(s-b)=(s-c)$，即 $a=b=c$，T 最大

$\therefore\ \left(\dfrac{s}{3}\right)^3\ge T\ \Rightarrow\ \left(\dfrac{s}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\ge\sqrt{T}\ \Rightarrow\ \sqrt{\left(\dfrac{s}{3}\right)^3}\ge\sqrt{T}$

$\Rightarrow\ \sqrt{\left(\dfrac{s}{3}\right)^3 s}\ge\sqrt{sT}$ （10分）

$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{sT}\le\sqrt{\dfrac{s^4}{27}}=\dfrac{\sqrt{3}s^2}{9}$ （12分）