臺中區國立高級中學九十三學年度第二學期
大學入學指定科目第三次聯合模擬考

數學甲考科

試題編號：AU-40033
考試日期：94.03.17

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內作答，選擇題答錯均倒扣。修正時應以橡皮擦拭，請勿在答案卡上使用修正液。第貳部分作答於「答案卷」，請在規定之欄位作答，並於題號欄標明題號。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

(一)選擇題：只用 1，2，3，4 等四個格子，而不需要用到－，±，以及 5，6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題為單一選擇題，選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±
1	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭

例：若第 10 題為多重選擇題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 1 與 3 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±
10	■	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭

(二)選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 － 與第 21 列的 7 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	－	±
20	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭
21	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭

祝考試順利

第壹部分（佔 76 分）

一、單一選擇題（12%）

說明：第 1 至 2 題，選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 2 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. $<a_n>$，$<b_n>$ 爲兩個公差不爲 0 的等差數列。已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{2n}}{n\cdot a_{3n}}=1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=$

   (1) $\dfrac{1}{2}$

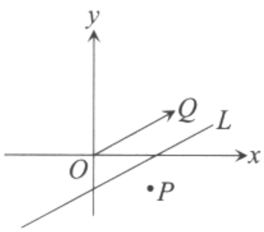
   (2) 1

   (3) $\dfrac{3}{2}$

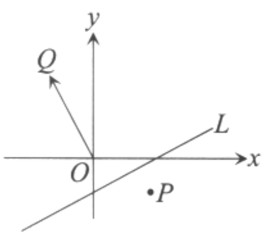
   (4) 2

2. 在平面上，直線 L 的方程式爲 $ax+by+c=0$，及一點 $P(x_0, y_0)$，且有 $ax_0+by_0+c>0$。下列各圖形中，哪一個向量 $\overrightarrow{OQ}$ 的坐標表示，最有可能爲 (a, b)？

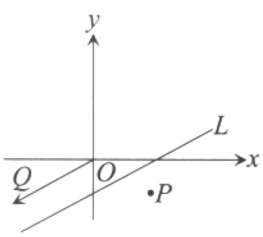
   (1)



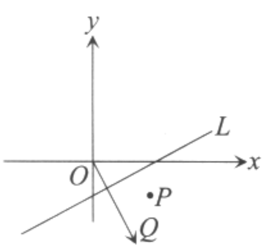
   (2)



   (3)



   (4)



二、多重選擇題（32%）

說明：第 3 至 6 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個選項，倒扣 2 分，完全答對得 8 分。整題未作答者，不給分亦不扣分。若在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 2 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

3. 直線 $x+\sqrt{3}y=0$ 繞原點順時針方向旋轉 θ（$0\leq\theta\leq\pi$）角後，與圓 $(x-2)^2+y^2=3$ 相切，則 θ 可能的值是多少？

(1) $\dfrac{\pi}{6}$

(2) $\dfrac{\pi}{3}$

(3) $\dfrac{\pi}{2}$

(4) $\dfrac{2\pi}{3}$

4. 已知 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 且 $A\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(1) $\begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $A\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值大於 2

(4) $a_1>b_1>c_1$

5. 將自然數 1，2，⋯，n（$n \le 9$），全部排列成n位正整數。若第k位數字為k時，可得 1 元（$1 \le k \le n$）（例：當百位數為 3 時，可得 1 元）。而X為所得錢數的總和，$E(X)$為期望值，則下列各選項哪些是正確的？

(1)當 $n=3$ 時，$E(X)=1$

(2)當 $n=4$ 時，$E(X)=2$

(3)當 n 逐漸增大時，$E(X)$ 亦隨之增大

(4)無論 n 為何正整數（$1 \le n \le 9$），$E(X)$ 恆不變

6. 一樓梯有n階，某人上樓，每次跨一階或二階。設此人走完n階之走法有a_n種，則下列各選項哪些是正確的？

(1) $a_4=5$

(2) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

(3) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$

(4) $a_{10}=90$

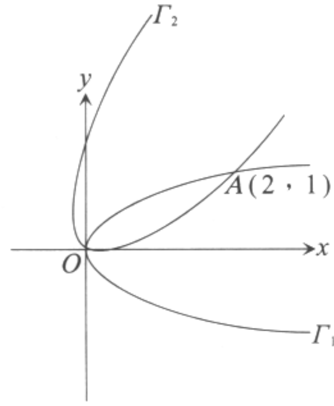
三、選填題（32%）

說明：A，B，C，D 各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 7～15 內。每題完全答對得 8 分，未完全答對，不給分。

A. 小王研究該居住地的濕度分成乾燥、適中、及潮濕三種。經長期觀察，若前一天為乾燥，則第二天可能為乾燥或適中，其發生機率各為$\frac{1}{2}$。若前一天為潮濕，則第二天可能為潮濕或適中，其發生機率各為$\frac{1}{2}$。若前一天為適中，則第二天三種情況皆有可能，其發生機率各為$\frac{1}{3}$。若以一年 210 日的觀察日來算，平均有多少天為適中的日子＿⑦⑧＿。

B. 有 5 筆二變數資料$(X，Y)$。資料為$(0，2)$，$(1，4)$，$(1，0)$，$(5，5)$，$(3，4)$。今若加入第 6 組資料$(1，k)$，與原先 5 組資料之y對x的迴歸線不變，則$k=$ $\frac{⑨⑩}{⑪⑫}$。（以最簡分數表示）

C. 已知拋物線 $\Gamma_1 : y^2 = \frac{1}{2}x$，且 Γ_1 繞原點旋轉得拋物線 Γ_2。若 Γ_1，Γ_2 相交於 $A(2，1)$，則 Γ_2 的對稱軸的斜率為 $\frac{⑬}{⑭}$ 。（以最簡分數表示）



D. 已知橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 與雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$ 有共同焦點 F_1，F_2。設 P 是它們的一個交點，則 $\triangle PF_1F_2$ 的面積為 ⑮ 。

第貳部分（佔 24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二），同時必須寫出演算過程或理由，否則將酌予扣分。每題配分標於題末。

一、購買一輛新的汽車要 94 萬元，另加保險金 4 萬元。每年要付稅金 2 萬元。而保養費及維修費第一年為 1 萬元，往後每年增加 1 萬元。（第二年起不再保險）

⑴若該車開了 10 年便報廢了（第 10 年的稅金、保養費及維修費皆付清），求平均每年的花費。（4 分）

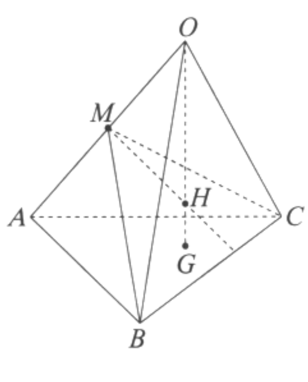
⑵若要使平均每年花費為最小，求該車的使用年限及平均每年花費。（8 分）

二、一四面體 $OABC$ 中，$\triangle ABC$ 的重心 G，$\overline{OA}$ 中點 M。

$\overline{OG}$ 與平面 MBC 交於點 H，試證：

⑴若 $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OM}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，則 $x+y+z=1$。（6 分）

⑵ $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$。（6 分）



臺中區國立高級中學九十三學年度第二學期
大學入學指定科目第三次聯合模擬考

數學甲詳解

試題編號：AU-40033
考試日期：94.03.17

第壹部分

一、單選題

1. (3)

【詳解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_{2n}}{n\cdot a_{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2n[2b_1+(2n-1)d']}{2}}{n[a_1+(3n-1)d]}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2b_1+(2n-1)d'}{a_1+(3n-1)d}=1$

$\therefore\ \dfrac{2d'}{3d}=1$，所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+(n-1)d'}{a_1+(n-1)d}=\dfrac{d'}{d}=\dfrac{3}{2}$

2. (4)

【詳解】$(0,0)$在$ax+by+c<0$之區域 $\Rightarrow\ c<0$

L與x軸交點爲$(-\dfrac{c}{a},0)\ \Rightarrow\ a>0$

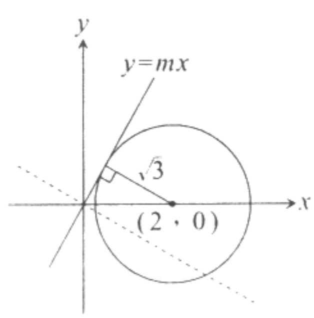
L與y軸交點爲$(0,-\dfrac{c}{b})\ \Rightarrow\ b<0$

(a,b)爲L之法向量

二、多選題

3. (1)(3)

【詳解】$x+\sqrt{3}y=0$ 的斜率爲 $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$



$\Rightarrow$ 與x軸正向夾角爲 150°

設過原點與圓相切的切線爲$y=mx$

則 $\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ 4m^2=3(m^2+1)\ \Rightarrow\ m=\pm\sqrt{3}$

當切線爲$y=\sqrt{3}x\ \Rightarrow$ 與x軸正向夾角爲 60°

$\Rightarrow$ 直線順時針轉 90°

當切線爲$y=-\sqrt{3}x\ \Rightarrow$ 與x軸正向夾角爲 120°

$\Rightarrow$ 直線順時針轉 30°

4. (1)(2)

【詳解】$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\therefore \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}=A^{-1}$$

$$\therefore \det(A^{-1})=\begin{vmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4+3+3-1=1$$

$$\Rightarrow \det A=\frac{1}{\det(A^{-1})}=1，A=\begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

5. (1)(4)

【詳解】①3 2 1

□□□

3 $\quad 1\times\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3}$

2 $\quad 1\times\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3}$

1 $\quad 1\times\dfrac{2!}{3!}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ 當 $n=3$ 時，$E(X)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$

②4 3 2 1

□□□□

4 $\quad 1\times\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

3 $\quad 1\times\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

2 $\quad 1\times\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

1 $\quad 1\times\dfrac{3!}{4!}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 當 $n=4$ 時，$E(X)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=1$

③當 $1\le n\le 9$ 時，$E(X)=\underbrace{1\times\dfrac{(n-1)!}{n!}+1\times\dfrac{(n-1)!}{n!}+\cdots+1\times\dfrac{(n-1)!}{n!}}_{n\text{ 個}}=1\times\dfrac{1}{n}\times n=1$

6. (1)(2)

【詳解】(1)當 $n=4$ 時，設跨一階有 x 次，跨二階有 y 次，則 $x+2y=4$

x	0	2	4
y	2	1	0

共有 $\frac{2!}{2!}+\frac{(2+1)!}{2!\cdot 1!}+\frac{4!}{4!}=1+3+1=5$ 種

(2) $n+2$ 階來看

若最後一次走 1 階，則前面共有 $(n+1)$ 階，走法有 a_{n+1} 種

若最後一次走 2 階，則前面共有 n 階，走法有 a_n 種

$\therefore\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

(3)數列 $\langle a_n\rangle=\langle 1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，\cdots\rangle$

$\therefore\ a_{10}=89$

三、選填題

A. 90（⑦ 9　⑧ 0）

【詳解】

	乾	中	濕
乾	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
中	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
濕	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

，轉移矩陣爲 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，令 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b=a \Rightarrow 3a=2b\\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=b\\ \frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c=c \Rightarrow 2b=3c\end{cases} \Rightarrow a:b:c=2:3:2 \quad \therefore\ 210\times\frac{3}{7}=90$$

B. $\frac{37}{16}$（⑨ 3　⑩ 7　⑪ 1　⑫ 6）

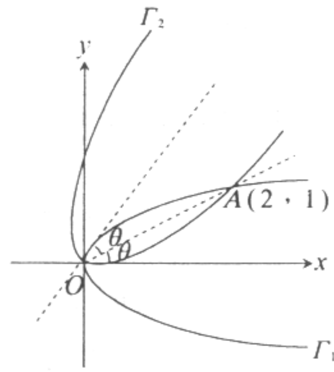
【詳解】$\overline{x}=2$，$\overline{y}=3$，$S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=11$，$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=16$

設迴歸線 $y=a+bx$，則 $b=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{11}{16}$，又 $\overline{y}=a+b\overline{x} \Rightarrow a=\frac{13}{8}$

$\therefore$ 迴歸線爲 $y=\frac{13}{8}+\frac{11}{16}x$

當 $x=1$ 時，$y=\frac{13}{8}+\frac{11}{16}=\frac{37}{16}$

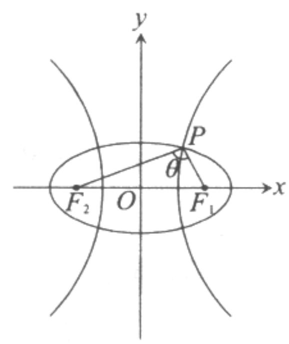
C. $\underline{\frac{4}{3}}$（⑬ $\underline{4}$ ⑭ $\underline{3}$）



【詳解】$\tan\theta=\frac{1}{2}$，$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$

∴ 對稱軸方程式爲 $y=\frac{4}{3}x$，斜率爲 $\frac{4}{3}$

D. $\underline{2}$（⑮ $\underline{2}$）



【詳解】$c^2=9-4=4+k \Rightarrow k=1$

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=6$，$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=4$

$\Rightarrow \overline{PF_1}=1$，$\overline{PF_2}=5$，$\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5}$

令 $\angle F_1PF_2=\theta$，則 $\cos\theta=\frac{1^2+5^2-(2\sqrt{5})^2}{2\times 1\times 5}=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{4}{5}$

∴ $\triangle PF_1F_2$ 面積爲 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot\frac{4}{5}=2$

【另解】$k=1$，$c=\sqrt{5}$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$

$\Rightarrow$ 得 $y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

∴ $\triangle PF_1F_2$ 面積 $=\frac{1}{2}\overline{F_1F_2}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=2$

第貳部分：非選擇題

一、(1) 17.3 萬　(2) 14 年，16.5 萬

【詳解】(1) $\frac{98+20+\frac{10\cdot 11}{2}}{10}=\frac{98+20+55}{10}=17.3$ 萬元

(2) $y=\frac{1}{n}[94+4+2n+(1+2+\cdots+n)]$

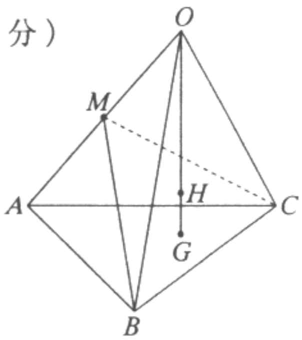
$=\frac{1}{n}[98+2n+\frac{n(n+1)}{2}]=\frac{98}{n}+2+\frac{n+1}{2}$（「列式」得 2 分）

$=\frac{98}{n}+\frac{n}{2}+\frac{5}{2}\geq 2\sqrt{\frac{98}{n}\cdot\frac{n}{2}}+\frac{5}{2}=16.5$（得 3 分）

$\frac{98}{n}=\frac{n}{2}\Rightarrow n=14$（得 3 分）

∴ 要使每年花費最小，則該車使用年限爲 14 年，且平均每年花費爲 16.5 萬元

二、【證明】(1) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MH}$（得 2 分）$=\overrightarrow{OM}+\alpha\overrightarrow{MB}+\beta\overrightarrow{MC}$（得 2 分）



$=\overrightarrow{OM}+\alpha(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})+\beta(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM})$

$=(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OM}+\alpha\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC}$

令 $1-\alpha-\beta=x$，$\alpha=y$，$\beta=z$，則 $x+y+z=1$（得 2 分）

(2) $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OG}$（得 3 分）

$=\frac{t}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

$=\frac{2t}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{t}{3}\overrightarrow{OC}$

由(1)得 $\frac{2t}{3}+\frac{t}{3}+\frac{t}{3}=1\Rightarrow t=\frac{3}{4}$（得 2 分）

∴ $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$（得 1 分）