

南一中

九十三學年度第四次模擬考試題(自然組)

數學科

第一部分：(75%)

一、單一選擇題 (占 12 分)

說明：第 1 至第 2 題，每題選出一個最適當的選項，標示在答案卷之「解答欄」，每題答對得 6 分，答錯倒扣 2 分，未答者不給分亦不扣分。

1. f 為 R 映至 R 之 1-1 函數，以 f^{-1} 表 f 之反函數，
若 $f(2x-3) = 2x (\forall x \in R)$ 則 $f^{-1}(x) =$

- (1) x (2) $\frac{x+3}{2}$ (3) $x-3$ (4) $2x-3$

2. $(\sqrt{2}-1)^5 + 3(\sqrt{2}-1)^4 - 2(\sqrt{2}-1)^3 - 4(\sqrt{2}-1)^2 + 9(\sqrt{2}-1) + 3 =$

- (1) 0 (2) 2 (3) 4 (4) 6

二、多重選擇題 (占 48 分)

說明：第 3~8 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卷之「解答欄」。各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 2 分；每答錯一個倒扣 2 分，完全答對得 8 分，未答者，不給分亦不扣分。

3. 下列關於二次曲線 $\Gamma: x^2 + 4xy + ky^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{5}y - 30 = 0$ 之敘述何者真確?

- (1) $k = 6$ 時 Γ 表一點 (2) $k = 4$ 時 Γ 表拋物線 (3) $k = 2$ 時 Γ 表雙曲線
(4) 若 Γ 表平行二直線，則此二直線間的距離為 5 . . .

4. 對於二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，已知 $a+d=1$ 且 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -3$. 若

$A^2 + mA + nI_2 = 0$ ($m, n \in R$, I_2 表二階乘法單位方陣)

則下列各敘述何者真確?

- (1) $n = -3$ (2) 方陣 $A - 2I$ 的行列式值為 -1 (3) $(A+I)^2 = 3A+4I$
(4) $A - 2I$ 與 $A+I$ 互為乘法反方陣

5. 空間坐標系中直線 $L_1: x-2 = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$ 與直線 $L_2: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+2t \\ z = 3+2t \end{cases} (t \in R)$

互為歪斜線。平面 E 包含 L_2 且與 L_1 平行，直線 L_1 在 E 之投影直線為 L_3 ，直線 L_3 與 L_2 之銳夾角為 θ 。 \overline{PQ} 為 L_1 與 L_2 之公垂線段，($P \in L_1, Q \in L_2$)

則下列何者真確？

- (1) P 點之坐標為 $(1,1,1)$ (2) Q 點之坐標為 $(3,0,1)$
 (3) L_1 與 L_2 之公垂線段長為 3 (4) $\theta = \frac{\pi}{4}$

6. p, q 為相異質數， $m = pq$ 。若不大於 m 而與 m 互質之自然數共有 $5+q$ 個則下列何者真確？

- (1) 合於題意之序對 (p, q) 共有四組 (2) $p+q > 7$ (3) $pq < 21$
 (4) 若 $p > q$ 則不大於 m 而與 m 互質之自然數共有 8 個。

7. 以 A 表本校籃球隊所有隊員所成的集合

以 B 表本校排球隊所有隊員所成的集合，以 p 表本校學生大華。

已知 $p \in A \cap B$ 則下列何者恆真確？

- (1) 大華是籃球隊隊員也是排球隊隊員
 (2) 大華不是籃球隊隊員 (3) 大華是排球隊隊員
 (4) 大華是籃球隊隊員或大華是排球隊隊員。

8. $M = 12^{21} + 27^{16}$ ，若 M 為 n 位整數其個位數字為 β ，最高位數字為 α 則下列何者真確？

- (1) $n = 23$ (2) $\alpha + \beta = 4$ (3) $\alpha = 7$ (4) $\beta = 3$

三、選填題 (占 15 分)

說明：A、B、C 三題，請在答案卷上「解答欄」之列號(9)~(15)中標示答案，
每一格完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A 由某班 50 位同學中任取十一位同學，比較這十一位同學上學期之數學平時成績 x 與數学期考成績 y 的關係。設第 i 位同學之數學平時成績與數学期考成績分別為 $x_i, y_i (i = 1, 2, 3, \dots, 11)$ ；由此得 x 之算術平均 $\bar{x} = 78$ ，

x 之樣本標準差 $S_x = 12$ ， y 之算術平均 $\bar{y} = 84$ ， y 之樣本標準差 $S_y = 10$

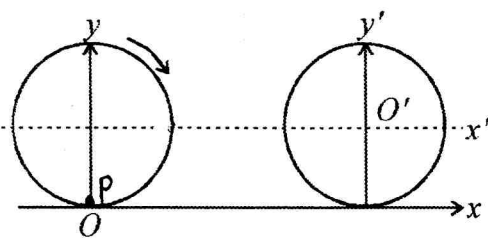
並知 $\sum_{i=1}^{11} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1152$ ，則 x, y 之相關係數 $r = \frac{\textcircled{9} \textcircled{10}}{100}$ 。

B 沿上題，若 y 對 x 之遞歸式(最適直線)為 $y = a + bx$ 則

序對 $(a, b) = \left(\frac{\textcircled{11} \textcircled{12} \textcircled{13} \textcircled{14}}{5}, \frac{\textcircled{13} \textcircled{14}}{5} \right)$ 。

C. 如圖，有一半徑 1 之圓形輪子，在平面上從原點起沿 x 軸正向滾動，此輪之角速度為每秒 $\frac{\pi}{6}$ ，輪子上有一點 $P(0, 0)$ 經過 300 秒後，其座標

為 (x, y) 則 $y = \underline{\textcircled{15}}$ 。



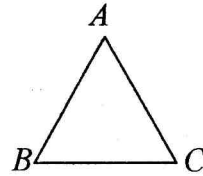
第貳部分：(25%)

說明：第 1 題及第 2 題請在答案卷之「作答區」作答，必須於題號欄註明題號；第 1 題為填充題，寫出結果即可，第 2 題則需寫出演算過程。
每題配分標於題末。

1. 有一人流浪於 A, B, C 三鎮間，
此三鎮相鄰關係如右圖。假設每日清晨，

此人決定當日夜晚繼續留宿該鎮的機率為 $\frac{1}{6}$ ，

如右圖依逆時針方向($A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$)



前往鄰鎮住宿之機率為 $\frac{3}{6}$ ，依順時針方向前往鄰鎮住宿之機率為 $\frac{2}{6}$ 。

已知此人第一夜宿於 A 鎮，今分別以 a_k, b_k, c_k 表第 k 天此人留宿於

A, B, C 三地之機率，並令 $X_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}$ ，若 $X_{k+1} = MX_k$ ($k \in N$,

M 為推移矩陣) 則

- (1) 推移矩陣 $M = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(5 分)
- (2) 若已知此人第四夜宿於 B 鎮，則此人第三夜宿亦於 B 鎮的條件機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，(5 分)
- (3) 如果流浪漢在三鎮間留宿之機率趨於穩定，

則 $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5 分)

2. 錐線 Γ 對坐標系 S_0 之方程式為 $x^2 + 4xy + cy^2 + dx + ey - 8 = 0$

其中心為 $K(-2, 3)$ 。今將坐標系 S_0 作適當平移得坐標系 S_1 使 Γ

對 S_1 之方程式缺一次項，再將 S_1 作 $\frac{\pi}{4}$ 旋轉得坐標系 S_2 ，若 Γ

對 S_2 之方程式為 $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{1} = 1$

- (1) 試求序組 (c, d, e) (5 分)
- (2) 求 Γ 之兩焦點對原坐標系 S_0 之坐標。(5 分)