臺北區公立高中九十三學年度第一學期

期末大學入學學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單一選擇題 4 題，多重選擇題 6 題，選填題第 A 至 J 題共 10 題。

作答方式：‧用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液。

‧答錯不倒扣。

作答說明：在答案卡適當的位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一)填答選擇題時，只用 1、2、3、4、5 等五個格子，而不需要用到－、±，以及 6、7、8，9、0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7〔亦即選項(3)〕時，考生要在答案卡第 1 列的 3 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
1	1	2	■	4	5	6	7	8	9	0	－	±

例：若多重選擇題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 10 列的 1 與 3 劃記，如：

10	■	2	■	4	5	6	7	8	9	0	－	±

(二)選項的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡第 18 列的 3 與第 19 列的 8 劃記，如：

18	1	2	■	4	5	6	7	8	9	0	－	±
19	1	2	3	4	5	6	7	■	9	0	－	±

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡第 20 列的 － 與第 21 列的 7 劃記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	■	±
21	1	2	3	4	5	6	■	8	9	0	－	±

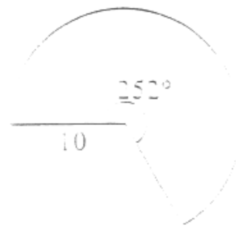
祝考試順利

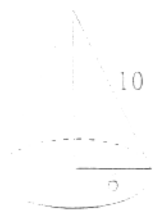
第壹部分：選擇題（50%）

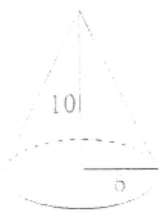
一、單一選擇題（20%）

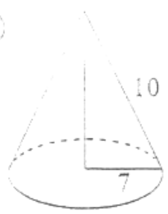
說明：第 1 至 4 題為單一選擇題，每題選出最適當的選項，作答於答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

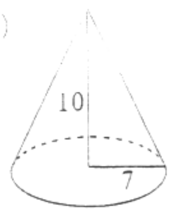
1. 將一個半徑爲 10，圓心角爲 252° 的扇形（如圖）的兩直邊對齊黏合，可形成下列哪個圓錐？

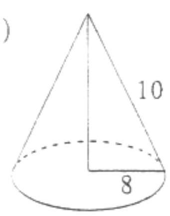


(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


2. 有一四次實係數方程式被分解爲 $(x^2+px+8)(x^2+px+11)=0$，已知此方程式有兩個實根、兩個虛根，且此兩實根的積爲 8，則 p 的可能值爲何？

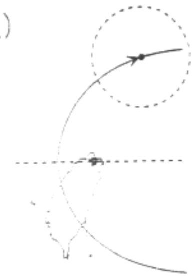
(1) 2
(2) 4
(3) 6
(4) 8
(5) 10

3. 方程式 $\cos(\log x)=0$ 在 $0<x<1$ 內有幾個解？

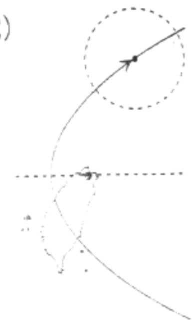
(1) 0
(2) 1
(3) 2
(4) 10
(5)無限多

4. 每當颱風來襲，氣象播報員總是爲了方便形容颱風的路徑，將它的行進路線稱爲拋物線，下列哪一個颱風中心所經過的軌跡最有可能以臺北（圖中的黑點）爲焦點，虛線爲對稱軸的拋物線？（可用你手邊工具做測量）

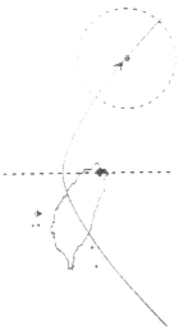
(1)



(2)

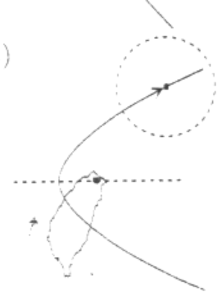


(3)



(4)

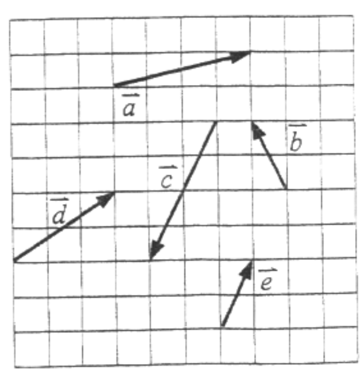
(5)



二、多重選擇題（30%）

說明：第 5 至 10 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個選項是正確的，請選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分，只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。

5. 右圖中每一個小方格皆爲邊長 1 單位的正方形，下列敘述哪些是正確的？



(1) $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}>0$

(2) $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=\overrightarrow{0}$

(3) $\overrightarrow{c}=-2\overrightarrow{e}$

(4) $\overrightarrow{a}\,//\,\overrightarrow{d}$

(5) $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}>0$

6. 給予一函數式 $f(x)$，約定其定義域爲使函數值 $f(x)$ 有意義之所有 x 值所成集合。令函數 $f(x)=\log(2x^2-x-6)$ 的定義域爲 F，$g(x)=\log\dfrac{x-2}{2x+3}$ 的定義域爲 G，$h(x)=\log(x-2)+\log(2x+3)$ 的定義域爲 H，試問下列敘述哪些正確？

(1) $F=G$

(2) $F\subset H$

(3) $G\subset H$

(4) $H\subset F$

(5) $H\subset G$

7. 直角三角形 ABC 的斜邊 $\overline{BC}$ 在平面 E 上，頂點 A 在平面 E 外，則 $\triangle ABC$ 的兩股 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 在平面 E 上的投影與斜邊 $\overline{BC}$ 所組成的圖形可能是下列哪些選項？

(1)一條直線

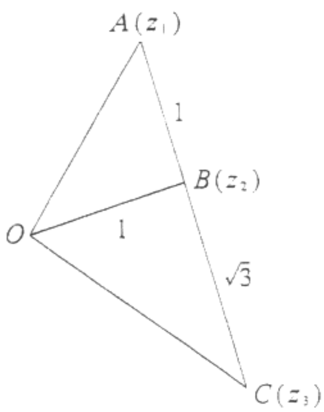
(2)一條線段

(3)一個直角三角形

(4)一個銳角三角形

(5)一個鈍角三角形

8. 在複數平面上，O 是坐標原點，$A(z_1)$，$B(z_2)$，$C(z_3)$ 三點共線，且 $\overline{OB}\perp\overline{AC}$，若已知 $\overline{AB}=\overline{OB}=1$，$\overline{BC}=\sqrt{3}$（參考右圖），試問下列何者爲真？



(1) $z_1=z_2\cdot(1+i)$

(2) $z_2=z_1\cdot(1-i)$

(3) $z_3=z_2\cdot(1-\sqrt{3}\,i)$

(4) $z_3=z_2\cdot(1+\sqrt{3}\,i)$

(5) $\dfrac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\sqrt{3}$

9. 有關方程式 $\Gamma:\dfrac{(x-2)^2}{k+2}+\dfrac{(y+3)^2}{2k-1}=1$，（$k\neq\dfrac{1}{2}$，$-2$）的圖形，下列敘述何者正確？

(1)當 $-2<k<\dfrac{1}{2}$ 時，Γ 的圖形是一個雙曲線

(2)當 $k<-2$ 或 $k>\dfrac{1}{2}$ 時，Γ 的圖形是一個橢圓

(3)若點 $(1,5)$ 在 Γ 的圖形上，則點 $(3,-11)$ 必在 Γ 的圖形上

(4)通過點 $(2,0)$ 的所有直線皆與 Γ 有交點

(5)若 Γ 與 $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y+3)^2}{12}=1$ 共焦點，則 $k=11$

10. 四組數值資料：

X_1：5，6，7，8，9

X_2：10，12，14，16，18

X_3：25，36，49，64，81

X_4：1995，1996，1997，1998，1999

其標準差爲 S_1、S_2、S_3，S_4，則下列選項哪些是正確的？

(1) $S_1 = S_2$

(2) $S_1 = S_4$

(3) $S_2 = 2S_1$

(4) $S_1^2 = S_3$

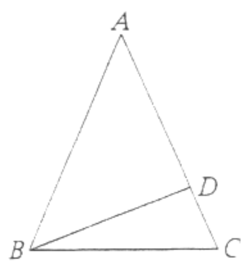
(5) $S_3 < S_4$

三、選填題（50%）

說明：1.第 A 至 J 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號（⑪至㊲）。
2.每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

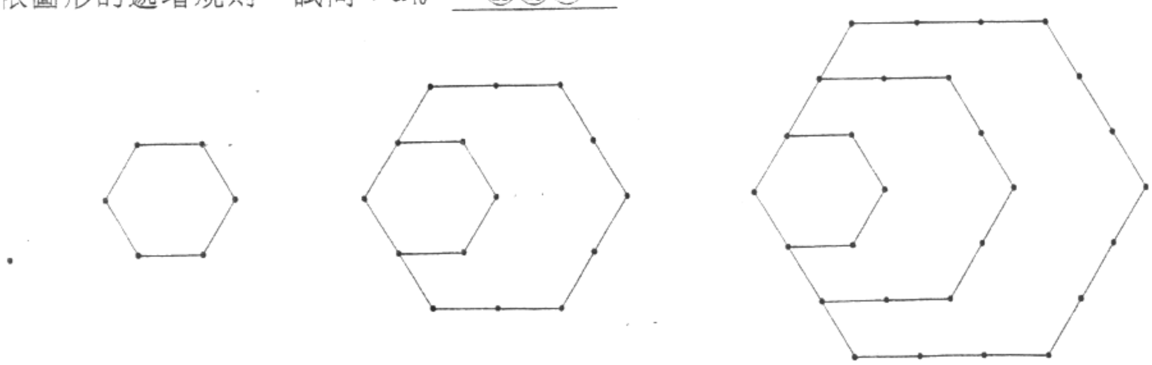
A. 考慮滿足下列條件的所有 $\triangle ABC$：

$\overline{AB} = \overline{AC}$，$D \in \overline{AC}$，且 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$。$\overline{AD}$ 與 $\overline{CD}$ 的長度均爲整數，且 $\overline{BD}^2 = 87$。在所有這樣的三角形中，$\overline{AC}$ 長度的最小值爲 ⑪⑫ 。



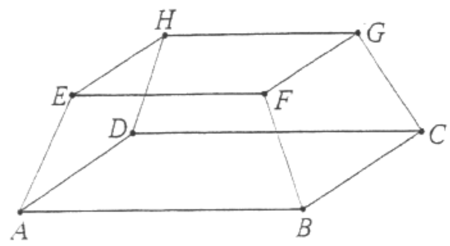
B. 將一張畫好座標平面的方格紙折疊一次，恰好使得點(0，2)與點(6，0)重合。此時點(5，−3)與點(a，b)重合，則 $a+b=$ ⑬⑭ 。

C. 在下圖中，a_n 爲每一個圖形裡所有黑點的個數，已知：$a_1=1$，$a_2=6$，$a_3=15$，$a_4=28$，依圖形的遞增規則，試問：$a_{10}=$ ⑮⑯⑰ 。



a_1 a_2 a_3 a_4

D. 如右圖，$ABCD$ - $EFGH$ 爲一個前後左右皆對稱的四角錐臺，$ABCD$ 與 $EFGH$ 均爲矩形，$\overline{AB}\,//\,\overline{EF}\,//\,\overline{DC}\,//\,\overline{HG}$，$\overline{AD}\,//\,\overline{EH}\,//\,\overline{BC}\,//\,\overline{FG}$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=6$，$\overline{EF}=8$，$\overline{FG}=4$，平面 $ABCD$ 與平面 $EFGH$ 爲平行平面，兩平面間的距離爲 3，若平面 $ADHE$ 與平面 $ABCD$ 之夾角爲 θ，則 $\cos\theta=$ $\dfrac{\sqrt{⑳㉑}}{⑱⑲}$ 。

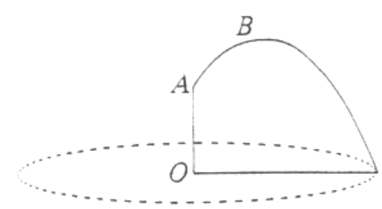


E. 已知圓 C 在直線 $L: x-2y=5$ 上之投影長爲 $2\sqrt{5}$，且圓 C 上與直線 L 相距最遠的點爲 $(-3,6)$，則此圓的方程式爲 $(x+㉒)^2+(y-㉓)^2=㉔$ 。

F. 在空間中，球面 $S: x^2+y^2+z^2=10$ 上有兩點 $A(3,0,1)$，$B(1,\sqrt{5},2)$，則 A 點到 B 點的最短球面距離爲 $\dfrac{\sqrt{㉖㉗}}{㉕}\pi$ 。

G. 空間中平面 E 的方程式爲 $x+y+z=2$，令 L 爲平面 E 與 xy 平面的交線，現在將平面 E 以 L 爲軸旋轉 α，得到新的平面 E'，E' 通過 $(3,1,-4)$，求平面 E' 的平面方程式 $㉘x+㉙y+㉚z=4$ 。

H. 某花圃爲節水推行噴灌技術，噴頭裝在管柱 $\overline{OA}$ 的頂端 A 處，噴出的水流在各個方向上呈拋物線狀，現要求水流最高點 B 離地面 5 公尺，點 B 到管柱 $\overline{OA}$ 所在直線的距離爲 4 公尺，且水流落在地面圓心爲點 O，半徑爲 9 公尺的圓上，則管柱高 $\overline{OA}=$ $\dfrac{㉜}{㉛}$ 公尺。



I. 將 1，2，3，…，9 共九個阿拉伯數字分別填入如右的九個方格中（數字不重複），則 1，2，3 三個數可連成一直線的機率爲 $\dfrac{㉟}{㉝㉞}$ 。

J. 有一自然數列爲 5，7，3，4，3，3，x，若將此數列的算術平均數、中位數及眾數依照大小次序排列，恰好形成一等差數列，試問 x 的值爲何？ ㊱㊲ 。

臺北區公立高中九十三學年度第一學期
期末大學入學學科能力測驗模擬考試

數學考科詳解

一、單一選擇題（20%）

1. (3)

【詳解】扇形的弧長＝圓錐底面的圓周長

$10\times(\frac{252°}{180°})\times\pi=2\pi r$（$r$＝圓錐底面的圓半徑）

$r=7$

故選(3)

2. (3)

【詳解】$(x^2+px+8)(x^2+px+11)=0$

$\Rightarrow$ $x^2+px+8=0$ 或 $x^2+px+11=0$

$\Rightarrow$ $D_1=p^2-32$，$D_2=p^2-44$

$\because$ 有兩實根，兩虛根　$\therefore$ $D_1\times D_2<0$

$\Rightarrow$ $(p^2-32)(p^2-44)<0$

$\Rightarrow$ $32<p^2<44$

故選(3)

3. (5)

【詳解】$\because$ $0<x<1$

$\therefore$ $\log x<0$，且 $\cos(\log x)=0$

$\log x=\frac{-k}{2}\pi$，$k\in N$

$\Rightarrow$ x 有無限多解

故選(5)

4. (2)

【詳解】作與對稱軸垂直的準線 L

即可得選項(2)為所求之拋物線

二、多重選擇題（30%）

5. (2)(3)(5)

【詳解】利用定座標可得

$\overrightarrow{a}=(4,1)$，$\overrightarrow{b}=(-1,2)$，$\overrightarrow{c}=(-2,-4)$，$\overrightarrow{d}=(3,2)$，$\overrightarrow{e}=(1,2)$

(1) $\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=(-1,2)\cdot(-2,-4)=2-8=-6<0$

(2) $\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}=(-1,2)+(-2,-4)+(3,2)=(0,0)=\overrightarrow{0}$

(3) $\overrightarrow{c}=(-2,-4)=-2(1,2)=-2\overrightarrow{e}$

(4) $\overrightarrow{a}=t\overrightarrow{d} \Rightarrow \overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{d}$

(5) $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{a}=(3,2)\cdot(4,1)=12+2=14>0$

故選(2)(3)(5)

6. (1)(4)(5)

【詳解】$F=\{x\mid 2x^2-x-6>0\}=\{x\mid x>2$ 或 $x<-\dfrac{3}{2}\}$

$G=\{x\mid \dfrac{x-2}{2x+3}>0\}=\{x\mid (x-2)(2x-3)>0\}$

$=\{x\mid x>2$ 或 $x<-\dfrac{3}{2}\}$

$H=\{x\mid x-2>0$ 且 $2x+3>0\}=\{x\mid x>2\}$

故選(1)(4)(5)

7. (2)(5)

【詳解】假設 A 在平面 E 上的投影爲 A'

(i)若 $\triangle ABC$ 與平面 E 垂直，則 A' 在 $\overline{BC}$ 上

$\Rightarrow$ $\triangle ABC$ 在平面 E 上的投影爲線段

(ii)若 $\triangle ABC$ 與平面 E 不垂直

則 $\overline{A'B}<\overline{AB}$ 且 $\overline{A'C}<\overline{AC}$

$\because$ $\triangle ABC$ 爲直角三角形

$\therefore$ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{A'B}^2+\overline{A'C}^2$

$\Rightarrow$ $\triangle A'BC$ 爲鈍角三角形

故選(2)(5)

8. (1)(3)(5)

【詳解】由圖可知 $\overline{OA}=\sqrt{2}$，$\overline{OC}=2$，$\angle AOB=45°$，$\angle BOC=60°$

$z_1=z_2\cdot\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=z_2\cdot(1+i)$

$z_2=z_1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]=z_1(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i)$

$z_3=z_2\cdot 2[\cos(-60°)+i\sin(-60°)]=z_2(1-\sqrt{3}i)$

$\dfrac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\dfrac{z_2(1-\sqrt{3}i)-z_2}{z_2-z_2(1+i)}=\dfrac{z_2(-\sqrt{3}i)}{z_2(-i)}=\sqrt{3}$

故選(1)(3)(5)

9. (1)(3)(5)

【詳解】(1) Γ 為雙曲線，$(k+2)(2k-1)<0$，$-2<k<\frac{1}{2}$

(2) Γ 為橢圓，$k+2>0$ 且 $2k-1>0$，$k>\frac{1}{2}$

但 $k+z\neq 2k-1$，$k\neq 3$，故 $k>\frac{1}{2}$，$k\neq 3$

(3)以 $(2，-3)$ 為對稱中心，$(1，5)$ 的對稱點為 $(3，-11)$

故 $(1，5)$ 在 Γ 的圖形上，則 $(3，-11)$ 必在 Γ 的圖形

(4)不一定

(5) $(2k-1)-(k-2)=12-4$，$k=11$

故選(1)(3)(5)

10. (2)(3)

【詳解】$x_2=2x_1 \Rightarrow S_2=2S_1$

$x_3=(x_1)^2 \Rightarrow S_1{}^2\neq S_3$

$x_4=x_1+1990 \Rightarrow S_4=S_1$

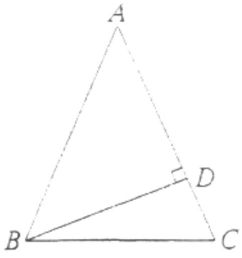
$S_3>S_4$

故選(2)(3)

三、選填題（50%）

A. 16（⑪ 1　⑫ 6）

【詳解】設 $\overline{AB}=x$，$\overline{AD}=y$



$x^2-y^2=87$

$(x+y)(x-y)=87=29\times 3=87\times 1$

$\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=13 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=87 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=44 \\ y=43 \end{cases}$

$\therefore$ $\overline{AC}$ 的最小值為 16

B. -2（⑬ $-$　⑭ 2）

【詳解】$(0，2)$ 和 $(6，0)$ 的中垂線為 $L：y=3x-8$

以 L 為對稱軸，$(5，-3)$ 的對稱點為 $(-1，-1)$

故 $a+b=-2$

C. 190（⑮ 1　⑯ 9　⑰ 0）

【詳解】a_1　a_2　a_3　a_4

1　6　15　28

5　9　13

4　4

觀察上面數列的關係可得

$a_n = a_{n-1} + [1 + 4(n-1)]$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 5$

$a_3 = a_2 + 9$

$\vdots$

$+)\ a_{10} = a_9 + 37$

$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \cdots + 37$

$= \dfrac{(1+37) \times 10}{2}$

$= 190$

D. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$（⑱ 1　⑲ 0　⑳ 1　㉑ 0）

【詳解】設 $\overline{EH}$ 在平面 $ABCD$ 上的投影爲 $\overline{E'H'}$

則 $\overline{EH}$ 和 $\overline{E'H'}$ 的距離爲 3

$\overline{E'H'}$ 和 $\overline{AD}$ 的距離爲 1

$\overline{EH}$ 和 $\overline{AD}$ 的距離爲 $\sqrt{10}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

E. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$（㉒ 2　㉓ 4　㉔ 5）

【詳解】∵ 圓 C 在 L 上的投影長爲 $2\sqrt{5}$

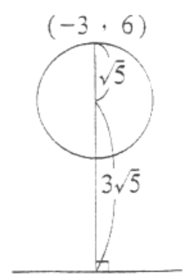
∴ 圓 C 的直徑爲 $2\sqrt{5}$

$(-3, 6)$ 在 L 上的投影爲 $(1, -2)$

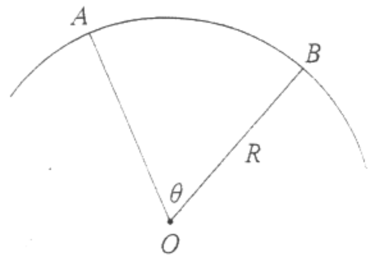
$(-3, 6)$ 到 L 的距離 $= 4\sqrt{5}$

⇒ 圓心坐標爲 $(-2, 4)$

故此圓的方程式爲 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$



F. $\frac{\sqrt{10}}{3}\pi$（㉕ $\underline{3}$ ㉖ $\underline{1}$ ㉗ $\underline{0}$）



【詳解】設 $\angle AOB=\theta$，其中 O 為球面 S 的球心

$\overline{OA}=(3,0,1)$，$\overline{OB}=(1,\sqrt{5},2)$

$$\cos\theta=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{|\overline{OA}||\overline{OB}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ A 點到 B 點的最短距離 $=\sqrt{10}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{10}}{3}\pi$

G. $2x+2y+z-4=0$（㉘ $\underline{2}$ ㉙ $\underline{2}$ ㉚ $\underline{1}$）

【詳解】平面 E 與 xy 軸的交點 $A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$，分別落在 L 上

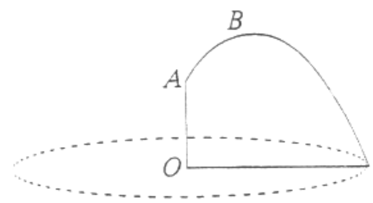
所以 E' 通過 A、B 兩點，所以 E' 通過 $A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(3,1,-4)$

設平面 E' 的法向量為 $\overline{n}$，$\overline{n}\perp\overline{AB}=(-2,2,0)$，$\overline{n}\perp\overline{AC}=(1,1,-4)$

$\Rightarrow$ $\overline{n}\,//\,(-2,2,0)\times(1,1,-4)=(-8,-8,-4)$

取 $\overline{n}=(2,2,1)$，E' 方程式為 $2x+2y+z-4=0$

H. $\frac{9}{5}$（㉛ $\underline{5}$ ㉜ $\underline{9}$）



【詳解】如圖，建立座標系，$O(0,0)$、$B(4,5)$、$C(9,0)$

$\because$ $B(4,5)$ 為最高點

$\therefore$ 令拋物線方程式為 $y=a(x-4)^2+5$，$a<0$

又拋物線通過 $C(9,0)$，代入方程式可得 $a=\frac{-1}{5}$

$\Rightarrow$ 拋物線 $y=\frac{-1}{5}(x-4)^2+5$，令 $x=0$

可得 $A(0,\frac{9}{5})$，$\overline{OA}=\frac{9}{5}$

I. $\frac{2}{21}$（㉝ $\underline{2}$ ㉞ $\underline{1}$ ㉟ $\underline{2}$）

【詳解】全部的方法 $=9!$

1，2，3 連成一線的方法 $=C^8_1\times3!\times6!$

$\therefore$ 1，2，3 連成一線的機率 $=\frac{C^8_1\cdot3!\cdot6!}{9!}=\frac{2}{21}$

J. 10（㊱ $\underline{1}$ ㊲ $\underline{0}$）

【詳解】3，3，3，4，5，7，x

眾數 $=3$

$\because$ 算術平均數、中位數、眾數依大小排列後成等差

$\therefore$ 中位數 $=4$

$\Rightarrow$ 算術平均數 $=5=\frac{3\times3+4+5+7+x}{7}$

故 $x=10$