臺北區公立高中九十三學年度第二學期
大學入學第一次指定考科聯合模擬考

數學乙詳解

第壹部分

一、多重選擇題：

1. (1)(2)

【詳解】圖解區域包含於 $|x-y|\leq 2$ 的圖解區域者爲其充分條件，故選(1)(2)

2. (2)(4)

【詳解】(1)二相同正根及一負根

(2)因爲 $y=f(x)$ 與 $y=0.3$ 在區間 $(-4，1)$ 沒有交點

所以 $f(x)-0.3=0$ 在區間 $(-4，1)$ 沒有實根

(3)餘式爲 $(3-4)f(3)=-1$

(4)由圖可知 $f(x)=(x-1)(x+4)Q(x)$，故 $xf(x)=x(x-1)(x+4)Q(x)$

(5) $f(-1)=-a+b-c+d<0$，可得 $a-b+c-d>0$

3. (1)(4)(5)

【詳解】$\overline{AB}=6$，$|\overline{AP}-\overline{BP}|\geq 6$

(1) $\overline{AP}+\overline{BP}=8>\overline{AB}$，$A$，$B$ 爲二焦點之橢圓

(2) $\overline{AP}+\overline{BP}=6=\overline{AB}$，$P$ 之軌跡爲 $\overline{AB}$

(3) $\overline{AP}=\overline{BP}+6$，一射線

(4) $\overline{AP}=\overline{BP}$，圖形爲 $\overline{AB}$ 的中垂線

(5) $\overline{AP}=2\overline{BP}$ 爲阿波羅尼斯圓

4. (1)(2)(3)(4)(5)

【詳解】(1)(2)(3)(4)爲指數函數圖形的性質

(5) $y=a^{|x|}$ 與 $y=3-x^2$ 的圖形有 2 個交點，故有兩個實根

5. (2)(3)(4)

【詳解】(1)方程組之 $\triangle=\triangle_x=\triangle_y=\triangle_z=0$，有無限多組解

(2)方程組可表爲 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3(x-1)+b_3(y-1)+c_3(z-1)=d_3 \end{cases}$，表三相異平面交於三線

三直線平行，故無解

(3)方程組與原方程組之 $\triangle$、$\triangle_x$、$\triangle_y$、$\triangle_z$ 均相同

故有相同解，而參數式爲同一條直線之參數式

(4)(5)交線之方向向量應與三平面之法向量垂直

6. (2)(3)(5)

【詳解】$\dfrac{4\cos x}{2\cos x-1}\le 1 \Rightarrow \dfrac{4\cos x}{2\cos x-1}-1\le 0 \Rightarrow \dfrac{2\cos x+1}{2\cos x-1}\le 0$

$\Rightarrow (2\cos x+1)(2\cos x-1)<0$ 或 $\cos x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le \cos x<\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}<x<\dfrac{5\pi}{3}$

故(2)(3)(5)的範圍可滿足此不等式

二、選填題

A. -8（⑦ $-$ ⑧ 8）

【詳解】$x^5-32=0$ 的四個虛根為 2ω，$2\omega^2$，$2\omega^3$，$2\omega^4$

其中 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，且 $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$，$\omega^5=1$

將此四根代入 $f(x)=x^3+x^2+1$，化簡可得 $f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(\delta)=-8$

B. $(1，\dfrac{4}{3}，\dfrac{4}{3})$（⑨ 1 ⑩ 4 ⑪ 3 ⑫ 4 ⑬ 3）

【詳解】設球心為 $(t，3t，2t)$，到 E 之距離為 1

故 $\dfrac{|2t+3t+4t-6|}{\sqrt{2^2+1+2^2}}=1 \Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$ 或 1（不合）

故相切時之球心座標為 $(\dfrac{1}{3}，1，\dfrac{2}{3})$

故設切點為 $(\dfrac{1}{3}+2t，1+t，\dfrac{2}{3}+2t)$，代入平面 E 得 $t=\dfrac{1}{3}$

故切點為 $(1，\dfrac{4}{3}，\dfrac{4}{3})$

C. $\dfrac{33}{17}$（⑭ 3 ⑮ 3 ⑯ 1 ⑰ 7）

【詳解】將圖形座標化。以 C 為原點

設 AE 直線上之點座標為 $(5t，3-3t)$，至 B 點 $(0，1)$ 距離為 2

故 $(5t)^2+(3-3t-1)^2=4$，解得 $t=0$（不合）或 $\dfrac{6}{17}$

故高度為 $3-3\times\dfrac{6}{17}=\dfrac{33}{17}$

D. $\sqrt{6}$（⑱ 6）

【詳解】所求為兩歪斜線之距離

兩直線之方向向量作公垂向量得法向量為 $(2，-1，1)$

故設平行 L_2 且包含 L_1 之平面為 $2x-y+z=k$

過 L_1 上的點 $(3，5，2)$，故 $k=3$

則 L_2 上的點 $(1，5，12)$ 到 $2x-y+z=3$ 之距離 $=\sqrt{6}$

E. $\underline{2520}$（⑲ $\underline{2}$　⑳ $\underline{5}$　㉑ $\underline{2}$　㉒ $\underline{0}$）

【詳解】$\dfrac{C_1^9C_2^8C_3^6C_3^3}{2!}=2520$

F. $\underline{\dfrac{21}{40}}$（㉓ $\underline{2}$　㉔ $\underline{1}$　㉕ $\underline{4}$　㉖ $\underline{0}$）

【詳解】奇奇：3 白 2 紅。奇偶：2 白 3 紅。偶奇：2 白 3 紅。偶偶：1 白 4 紅

$(\dfrac{3}{6})^2\times\dfrac{C_2^2C_1^3}{C_3^6}+2\times(\dfrac{3}{6})^2\times\dfrac{C_2^3C_1^2}{C_3^6}+(\dfrac{3}{6})^2\times\dfrac{C_1^1C_2^4}{C_3^6}=\dfrac{21}{40}$

第貳部分：

一、⑴圖形爲以 $2+\sqrt{3}i$，$2-\sqrt{3}i$ 爲焦點，長軸長爲 4 的橢圓。（3 分）

⑵點 $z(x，y)$ 的軌跡是橢圓，中心爲 $(2，0)$，$a=2$，$c=\sqrt{3}$

故方程式爲 $(x-2)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$（2 分）

【解 1】$\because\ |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

而 $x^2+y^2=x^2+[4-4(x-2)^2]=-3x^2+16x-12=-3(x-\dfrac{8}{3})^2+\dfrac{28}{3}$

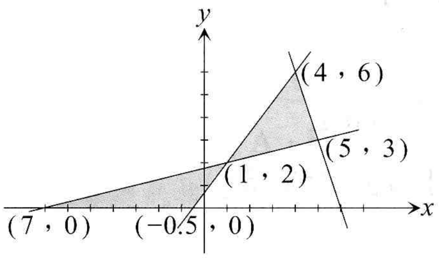
且 $1\le x\le 3$（3 分），故 $|z|$ 的最大值爲 $\sqrt{\dfrac{28}{3}}$，最小值爲 1（3 分）

【解 2】設 $(x，y)=(2+\cos\theta，2\sin\theta)$

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=4+4\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta\\&=4+4\cos\theta+\cos^2\theta+4(1-\cos^2\theta)\\&=-3\cos^2\theta+4\cos\theta+8\\&=-3(\cos\theta-\frac{2}{3})^2+\frac{28}{3}\ （3\ 分）\end{aligned}$$

又 $-1\le\cos\theta\le 1$，故 $|z|$ 的最大值爲 $\sqrt{\dfrac{28}{3}}$，最小值爲 1（3 分）（共 8 分）

二、⑴



（4 分）

⑵當 $(x，y)=(4，6)$ 時，P 有最大值 $=14$（3 分）

⑶ $L：y=mx-3$ 必過 $(0，-3)$

過 $(0，-3)$，$(5，3)$ 的直線斜率 $=\dfrac{6}{5}$

過 $(0，-3)$，$(-7，0)$ 的直線斜率 $=-\dfrac{3}{7}$

$\therefore\ m\le-\dfrac{3}{7}$ 或 $m\ge\dfrac{6}{5}$（4 分）