臺北區公立高中九十三學年度第二學期
大學入學第一次指定考科聯合模擬考

數學甲詳解

第壹部分：

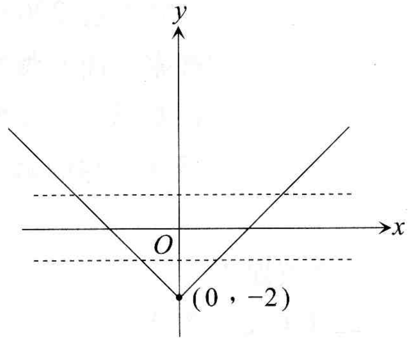
一、單一選擇題：

1. (5)

【詳解】$|f(x)|=1 \Leftrightarrow f(x)=\pm 1$

如圖，共有 4 個交點

所以 $|f(x)|=1$ 有 4 個實數解



2. (1)

【詳解】取出 2 張卡片的情形有{1，1}、{2，2}、{3，3}、{1，2}、{1，3}、{2，3}

取出{1，1}、{2，2}、{3，3}的機率都是 $\dfrac{1}{C_2^6}=\dfrac{1}{15}$

取出{1，2}、{1，3}、{2，3}的機率都是 $\dfrac{2\times 2}{C_2^6}=\dfrac{4}{15}$

期望值 $=(1\times 1+2\times 2+3\times 3)\times\dfrac{1}{15}+(1\times 2+1\times 3+2\times 3)\times\dfrac{4}{15}=\dfrac{58}{15}$

二、多重選擇題：

3. (3)(4)(5)

【詳解】(1) $f(x)=2x^3-3x^2-4x-1=2(x-2)^3+9(x-2)^2+8(x-2)-5$

故 $b=9$

(2) $f(2+i)\neq f(2-i)$

(3)因 $f(x)=2x^3-3x^2-4x-1=(2x+1)(x^2-2x-1)$

故 $f(1+\sqrt{2})=f(1-\sqrt{2})=0$

(4)因 $f(2)f(3)<0$

故在 2 與 3 之間至少有一實根

(5) $f(2.1)=2(0.1)^3+9(0.1)^2+8(0.1)-5=-4.108$

4. (2)(3)(4)(5)

【詳解】依題意 $\Rightarrow d^2+15=r^2$

$d^2+a=9r^2 \Rightarrow a=8r^2+15$

又∵ $d^2=r^2-15\geq 0 \Rightarrow r\geq\sqrt{15}\, a=8r^2+15\geq 135$

故選(2)(3)(4)(5)

5. (1)(3)(4)

【詳解】(1)鈉的含量從小至大依序排列成 100，110，110，115，130，130，140，140，140，140，140，150，155，155，155，160，160，160，170，175

所以中位數爲 140 毫克 / 100 克

(2)鈉的含量的平均值約爲 141.75 毫克，觀察上面的數據，含鈉的值與平均值 141 差的絕對值都在 45 毫克以下，因此標準差不可能會大於 45 毫克

(3)樣本的熱量從小至大排序第 10、11 個值分別爲 200、215 大卡 / 100 克，所以中位數介於 200～225 大卡 / 100 克

(4)觀察上面的數據所形成的樣本點，這些點的分布都是右上左下的分布，因此相關係數是一個正數

(5)最佳直線的斜率不一定爲相關係數

三、選填題：

A. 22（⑥ 2　⑦ 2）

【詳解】已知 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\theta & -\sin n\theta\\ \sin n\theta & \cos n\theta\end{bmatrix}$

$$故 A^n=\begin{bmatrix}\cos\frac{5\pi}{11} & \sin(\frac{-5\pi}{11})\\ \sin\frac{5\pi}{11} & \cos\frac{5\pi}{11}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos\frac{5n\pi}{11} & \sin(\frac{-5n\pi}{11})\\ \sin\frac{5n\pi}{11} & \cos\frac{5n\pi}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

則 $\cos(\frac{-5n\pi}{11})=1$，$\sin(\frac{-5n\pi}{11})=0$

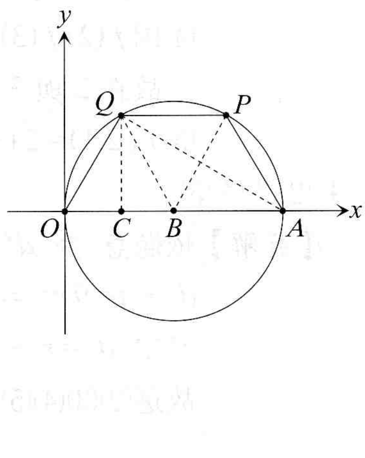
故取 $n=22$ 時爲滿足條件的最小自然數 n

B. $\frac{16}{23}$（⑧ 1　⑨ 6　⑩ 2　⑪ 3）

$$【詳解】P(不是隨意猜答\mid答對)=\frac{\frac{2}{5}\times 1}{\frac{2}{5}\times 1+\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}=\frac{16}{23}$$

C. $1+\sqrt{3}$（⑫ 1　⑬ 3）

【詳解】設圓的圓心 $B(1，0)$，連 $\overline{QB}$、$\overline{BP}$



$\overline{BQ}=\overline{QP}=\overline{PB}=1$

$\therefore\ \triangle BQP$ 爲正三角形

$\Rightarrow\ \angle OBQ=\angle ABP=60^\circ$

$\Rightarrow\ \overline{QC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$OC=\frac{1}{2}$

$\overline{AC}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ 長軸長 $=\overline{OQ}+\overline{QA}=1+\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=1+\sqrt{3}$

D. 17（⑭ 1　⑮ 7）

【詳解】因爲 $a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}$

故 $a_n=(\frac{3}{4})^n a_0<\frac{1}{100}\times a_0$

$\Rightarrow\ \log[(\frac{3}{4})^n a_1]<\log(\frac{1}{100}\times a_1)$

$\Rightarrow\ n\log\frac{3}{4}+\log a_1<\log\frac{1}{100}+\log a_1$

$\Rightarrow\ n\log\frac{3}{4}<\log\frac{1}{100}$

$\Rightarrow\ n>\dfrac{\log\frac{1}{100}}{\log\frac{3}{4}}$

$\Rightarrow\ n>\dfrac{\log\frac{1}{100}}{\log\frac{3}{4}}=\dfrac{-\log 100}{\log 3-\log 4}=\dfrac{2}{0.1249}=16.0128$

故取 $n=17$

E. $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$（⑯ 3　⑰ 2）

【詳解】$\triangle ABP$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$ 高

所以要找 $\triangle ABP$ 的最小值

$\Leftrightarrow$ $\overline{AB}$ 邊上高的最小值

$\Leftrightarrow$ 球面上的點 P 到直線 AB 的最小值

設球心 $O(0,0,0)$ 在直線 AB 上的投影點 $H(1+t,1,t)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\ (1+t,1,t)\cdot(1,0,1)\ \Leftrightarrow\ t=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OH}=(\frac{1}{2},1,\frac{-1}{2})$，$|\overrightarrow{OH}|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\overline{AB}$ 邊上高的最小值 $=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1$

此時 $\triangle ABP$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

F. 10（⑱ 1　⑲ 0）

【詳解】依題意可得方程式 $\begin{cases}9a-b+c=10\\ 9a-\frac{3}{2}b+c=8.5\\ 9a-2b+c=7\end{cases}$

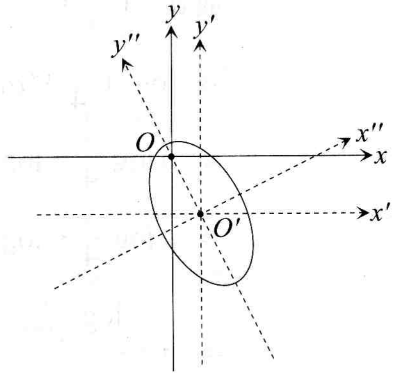
因爲 a，b，c 爲正整數，所以可解得 $a=1$，$b=3$，$c=4$

$\Rightarrow$ 安全防護牆應設計爲 $h+2.5=1\times 9.5-\frac{3}{2}\times\log 10^4+4+2.5=10$（公尺）

第貳部分：非選擇題

1. (1) $6x''^2+y''^2=6$，$y+2=\frac{1}{2}(x-1)$　(2) $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$，$\frac{x''^2}{-4}+\frac{y''^2}{1}=1$

【詳解】(1)設平移原點 $O'(h, k)$



根據移軸公式 $\begin{cases} 10h+4k-2=0 \\ 4h+4k+4=0 \end{cases}$

$\Rightarrow (h, k)=(1, -2)$，將中心移軸至 $(1, -2)$ 後

方程式將簡化成 $5x'^2+4x'y'+2y'^2-6=0$

再轉軸 θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$\cot 2\theta=\frac{3}{4} \Rightarrow \cos 2\theta=\frac{3}{5}$

故 $\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

方程式化成 $a''x''^2+c''y''^2=6 \Rightarrow a''+c''=7$，$a''-c''=5$

$\Rightarrow a''=6$，$c''=1$ $\therefore$ 方程式化成 $6x''^2+y''^2=6$（3 分）

短軸所在直線的斜率爲 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，又過中心 $(1, -2)$

方程式爲 $y+2=\frac{1}{2}(x-1)$（3 分）

(2) P 在 $x''y''$ 坐標系上的坐標爲 $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$（3 分）

設與橢圓共焦點之雙曲線爲 $\frac{y''^2}{6+t}+\frac{x''^2}{1+t}=1$ ……①

則 t 必須滿足不等式 $(6+t)(1+t)<0 \Rightarrow -6<t<-1$ ……②

再將 $(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}})$ 代入①中得 $\frac{\frac{9}{5}}{6+t}+\frac{\frac{16}{5}}{1+t}=1$

化簡得 $t^2+2t-15=0 \Rightarrow (t-3)(t+5)=0$，由②可得 $t=-5$（3 不合）

將 $t=-5$ 代回①，即得 $\frac{x''^2}{-4}+\frac{y''^2}{1}=1$ ……（6 分）

2. (1) $t^3+t^2+t-3=0$　(2) 1　(3) $\frac{\pi}{2}$

【詳解】(1)設 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=t$

$\Rightarrow 2t+\frac{t^2-1}{2}-t(1-\frac{t^2-1}{2})=1 \Rightarrow t^3+t^2+t-3=0$

(2) $(t-1)(t^2+2t+3)=0 \Rightarrow t=1$

(3) $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$，又 $\frac{\pi}{2}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}$

故 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ $\therefore x=\frac{\pi}{2}$