臺北區公立高中九十三學年度第一學期
期末大學入學學科能力測驗模擬考試

數學考科詳解

一、單一選擇題（20%）

1. (3)

【詳解】扇形的弧長＝圓錐底面的圓周長

$10\times(\frac{252°}{180°})\times\pi=2\pi r$（$r$＝圓錐底面的圓半徑）

$r=7$

故選(3)

2. (3)

【詳解】$(x^2+px+8)(x^2+px+11)=0$

$\Rightarrow$ $x^2+px+8=0$ 或 $x^2+px+11=0$

$\Rightarrow$ $D_1=p^2-32$，$D_2=p^2-44$

$\because$ 有兩實根，兩虛根 $\therefore$ $D_1\times D_2<0$

$\Rightarrow$ $(p^2-32)(p^2-44)<0$

$\Rightarrow$ $32<p^2<44$

故選(3)

3. (5)

【詳解】$\because$ $0<x<1$

$\therefore$ $\log x<0$，且 $\cos(\log x)=0$

$\log x=\frac{-k}{2}\pi$，$k\in N$

$\Rightarrow$ x 有無限多解

故選(5)

4. (2)

【詳解】作與對稱軸垂直的準線 L

即可得選項(2)爲所求之拋物線

二、多重選擇題（30%）

5. (2)(3)(5)

【詳解】利用定座標可得

$\vec{a}=(4,1)$，$\vec{b}=(-1,2)$，$\vec{c}=(-2,-4)$，$\vec{d}=(3,2)$，$\vec{e}=(1,2)$

(1) $\vec{b}\cdot\vec{c}=(-1,2)\cdot(-2,-4)=2-8=-6<0$

(2) $\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=(-1,2)+(-2,-4)+(3,2)=(0,0)=\vec{0}$

(3) $\vec{c}=(-2,-4)=-2(1,2)=-2\vec{e}$

(4) $\vec{a}\neq t\vec{d} \Rightarrow \vec{a}\nparallel\vec{d}$

(5) $\vec{d}\cdot\vec{a}=(3,2)\cdot(4,1)=12+2=14>0$

故選(2)(3)(5)

6. (1)(4)(5)

【詳解】$F=\{x\,|\,2x^2-x-6>0\}=\{x\,|\,x>2$ 或 $x<-\frac{3}{2}\}$

$G=\{x\,|\,\frac{x-2}{2x+3}>0\}=\{x\,|\,(x-2)(2x+3)>0\}$

$=\{x\,|\,x>2$ 或 $x<-\frac{3}{2}\}$

$H=\{x\,|\,x-2>0$ 且 $2x+3>0\}=\{x\,|\,x>2\}$

故選(1)(4)(5)

7. (2)(5)

【詳解】假設 A 在平面 E 上的投影為 A'

(i)若 $\triangle ABC$ 與平面 E 垂直，則 A' 在 $\overline{BC}$ 上

$\Rightarrow$ $\triangle ABC$ 在平面 E 上的投影為線段

(ii)若 $\triangle ABC$ 與平面 E 不垂直

則 $\overline{A'B}<\overline{AB}$ 且 $\overline{A'C}<\overline{AC}$

$\because$ $\triangle ABC$ 為直角三角形

$\therefore$ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>\overline{A'B}^2+\overline{A'C}^2$

$\Rightarrow$ $\triangle A'BC$ 為鈍角三角形

故選(2)(5)

8. (1)(3)(5)

【詳解】由圖可知 $\overline{OA}=\sqrt{2}$，$\overline{OC}=2$，$\angle AOB=45°$，$\angle BOC=60°$

$z_1=z_2\cdot\sqrt{2}(\cos 45°+i\sin 45°)=z_2\cdot(1+i)$

$z_2=z_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]=z_1(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)$

$z_3=z_2\cdot 2[\cos(-60°)+i\sin(-60°)]=z_2(1-\sqrt{3}i)$

$\frac{z_3-z_2}{z_2-z_1}=\frac{z_2(1-\sqrt{3}i)-z_2}{z_2-z_2(1+i)}=\frac{z_2(-\sqrt{3}i)}{z_2(-i)}=\sqrt{3}$

故選(1)(3)(5)

9. (1)(3)(5)

【詳解】(1) Γ 爲雙曲線，$(k+2)(2k-1)<0$，$-2<k<\frac{1}{2}$

(2) Γ 爲橢圓，$k+2>0$ 且 $2k-1>0$，$k>\frac{1}{2}$

但 $k+z \neq 2k-1$，$k \neq 3$，故 $k>\frac{1}{2}$，$k \neq 3$

(3)以 $(2,-3)$ 爲對稱中心，$(1,5)$ 的對稱點爲 $(3,-11)$

故 $(1,5)$ 在 Γ 的圖形上，則 $(3,-11)$ 必在 Γ 的圖形

(4)不一定

(5) $(2k-1)-(k+2)=12-4$，$k=11$

故選(1)(3)(5)

10. (2)(3)

【詳解】$x_2=2x_1 \Rightarrow S_2=2S_1$

$x_3=(x_1)^2 \Rightarrow S_1{}^2 \neq S_3$

$x_4=x_1+1990 \Rightarrow S_4=S_1$

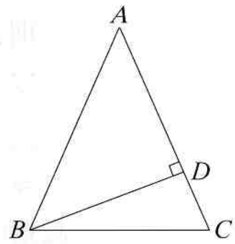
$S_3>S_4$

故選(2)(3)

三、選填題（50%）

A. 16（⑪ 1　⑫ 6）

【詳解】設 $\overline{AB}=x$，$\overline{AD}=y$



$x^2-y^2=87$

$(x+y)(x-y)=87=29\times 3=87\times 1$

$\begin{cases} x+y=29 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=13 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=87 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=44 \\ y=43 \end{cases}$

$\therefore$ $\overline{AC}$ 的最小值爲 16

B. -2（⑬ $-$　⑭ 2）

【詳解】$(0,2)$ 和 $(6,0)$ 的中垂線爲 L：$y=3x-8$

以 L 爲對稱軸，$(5,-3)$ 的對稱點爲 $(-1,-1)$

故 $a+b=-2$

C. 190（⑮ $\underline{1}$　⑯ $\underline{9}$　⑰ $\underline{0}$）

【詳解】a_1　a_2　a_3　a_4

1　6　15　28

5　9　13

4　4

觀察上面數列的關係可得

$a_n = a_{n-1} + [1 + 4(n-1)]$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 5$

$a_3 = a_2 + 9$

$\vdots$

$+)\ a_{10} = a_9 + 37$

$$a_{10} = 1 + 5 + 9 + \cdots + 37 = \frac{(1+37)\times 10}{2} = 190$$

D. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$（⑱ $\underline{1}$　⑲ $\underline{0}$　⑳ $\underline{1}$　㉑ $\underline{0}$）

【詳解】設 $\overline{EH}$ 在平面 $ABCD$ 上的投影爲 $\overline{E'H'}$

則 $\overline{EH}$ 和 $\overline{E'H'}$ 的距離爲 3

$\overline{E'H'}$ 和 $\overline{AD}$ 的距離爲 1

$\overline{EH}$ 和 $\overline{AD}$ 的距離爲 $\sqrt{10}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

E. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$（㉒ $\underline{2}$　㉓ $\underline{4}$　㉔ $\underline{5}$）

【詳解】∵ 圓 C 在 L 上的投影長爲 $2\sqrt{5}$

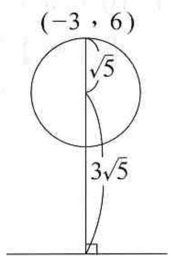
∴ 圓 C 的直徑爲 $2\sqrt{5}$

$(-3, 6)$ 在 L 上的投影爲 $(1, -2)$

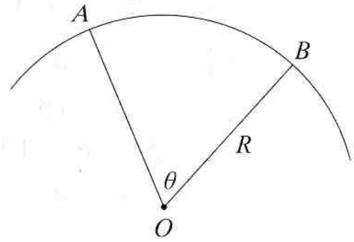
$(-3, 6)$ 到 L 的距離 $= 4\sqrt{5}$

⇒ 圓心坐標爲 $(-2, 4)$

故此圓的方程式爲 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$



F. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}\pi$（㉕ $\underline{3}$　㉖ $\underline{1}$　㉗ $\underline{0}$）



【詳解】設 $\angle AOB=\theta$，其中 O 爲球面 S 的球心

$\overrightarrow{OA}=(3,0,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{5},2)$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

$\Rightarrow$ A 點到 B 點的最短距離 $=\sqrt{10}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}\pi$

G. $2x+2y+z-4=0$（㉘ $\underline{2}$　㉙ $\underline{2}$　㉚ $\underline{1}$）

【詳解】平面 E 與 xy 軸的交點 $A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$，分別落在 L 上

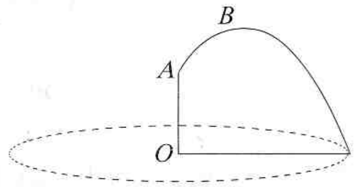
所以 E' 通過 A、B 兩點，所以 E' 通過 $A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(3,1,-4)$

設平面 E' 的法向量爲 $\vec{n}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}=(-2,2,0)$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}=(1,1,-4)$

$\Rightarrow$ $\vec{n}\,//\,(-2,2,0)\times(1,1,-4)=(-8,-8,-4)$

取 $\vec{n}=(2,2,1)$，E' 方程式爲 $2x+2y+z-4=0$

H. $\dfrac{9}{5}$（㉛ $\underline{5}$　㉜ $\underline{9}$）



【詳解】如圖，建立座標系，$O(0,0)$、$B(4,5)$、$C(9,0)$

$\because$ $B(4,5)$ 爲最高點

$\therefore$ 令拋物線方程式爲 $y=a(x-4)^2+5$，$a<0$

又拋物線通過 $C(9,0)$，代入方程式可得 $a=\dfrac{-1}{5}$

$\Rightarrow$ 拋物線 $y=\dfrac{-1}{5}(x-4)^2+5$，令 $x=0$

可得 $A(0,\dfrac{9}{5})$，$\overline{OA}=\dfrac{9}{5}$

I. $\dfrac{2}{21}$（㉝ $\underline{2}$　㉞ $\underline{1}$　㉟ $\underline{2}$）

【詳解】全部的方法 $=9!$

1，2，3 連成一線的方法 $=C^8_1\times3!\times6!$

$\therefore$ 1，2，3 連成一線的機率 $=\dfrac{C^8_1\cdot3!\cdot6!}{9!}=\dfrac{2}{21}$

J. 10（㊱ $\underline{1}$　㊲ $\underline{0}$）

【詳解】3，3，3，4，5，7，x

眾數 $=3$

$\because$ 算術平均數、中位數、眾數依大小排列後成等差

$\therefore$ 中位數 $=4$

$\Rightarrow$ 算術平均數 $=5=\dfrac{3\times3+4+5+7+x}{7}$

故 $x=10$