臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學學科能力測驗第一次聯合模擬考
數學考科詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(3)

   試題解析：每一回會增加爲 9 倍

   因此，所求爲 $9^4=6561$

   故選(3)

2. 參考答案：(4)

   試題解析：$\because f(\frac{1}{2})=0$，$g(\frac{1}{2})=0$

   令 $f(x)=(2x-1)h(x)$，$g(x)=(2x-1)k(x)$

   (1) $f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}\neq 0$

   (2) $2\cdot\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})-1\neq 0$

   (3) $\frac{f(x)g(x)}{(2x-1)^2}=h(x)k(x)$

   $2x-1\mid h(x)k(x)$ 不一定成立

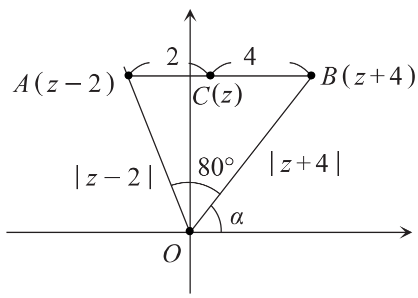
   (4) $(\frac{1}{2}+1)f(\frac{1}{2})+(\frac{1}{4}-3)g(\frac{1}{2})=0$

   (5) $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})-(\frac{1}{2})^2g(\frac{1}{2})+3\neq 0$

   故選(4)

3. 參考答案：(2)

   試題解析：由已知可得右圖，令 $z-2$，z，$z+4$ 在複數平面上的對應點爲 A，C，B，原點爲 O

   $\because\ \overline{AC}=2$，$\overline{BC}=4$，且 $|z+4|=2|z-2|$

   即 $\overline{OB}:\overline{OA}=2:1\quad\therefore\ \overline{OC}$ 平分 $\angle AOB$

   又 $\angle AOB=80^\circ$

   $\therefore\ \angle BOC=40^\circ$

   $\therefore\ \mathrm{Arg}(\frac{z}{z+4})=40^\circ$

   故選(2)

4. 參考答案：⑵

試題解析：$\overrightarrow{AB}=(-4,2,-2)=2(-2,1,-1)$

$P(x,y,z)=(-1-2t,3+t,2-t)$

$\overrightarrow{OP}=(-1-2t,3+t,2-t)$　　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0\ \Rightarrow\ 2+4t+3+t-2+t=0\ \Rightarrow\ t=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ P(0,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$

故選⑵

5. 參考答案：⑶

試題解析：⑴由圖知英文與國文 60 分以上的人數相同，但英文的分數較高，所以英文平均較高

⑵由圖知，全班總人數為 40 人，兩科 60 分以下的人數分布相同，且人數均為 30 人　∴ 兩科之中位數相同

⑶國文的成績較集中，所以標準差較小

⑷英文的眾數為 50～60，數學的眾數為 40～50，所以英文的眾數較大

⑸兩科的成績分布相同，所以標準差相同

故選⑶

6. 參考答案：⑷

試題解析：由常態分布原則，早產兒佔 2.5%

所以早產兒有 200000×2.5%＝5000 位

故選⑷

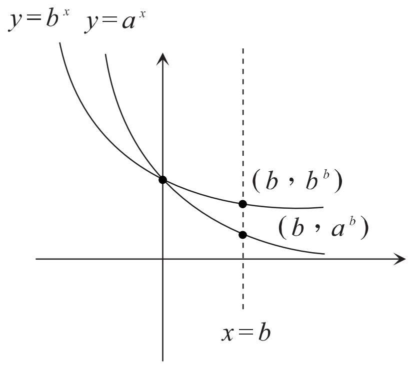
二、多選題

7. 參考答案：⑵⑶

試題解析：⑴ $0<a<1\ \Rightarrow\ y=a^x$ 為遞減函數

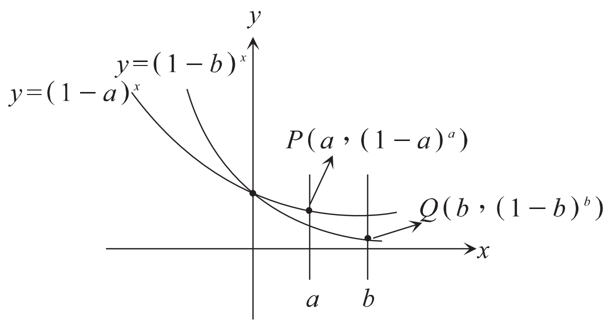
故 $a^a>a^b$（錯誤）

⑵



$\Rightarrow\ b^b>a^b$（正確）

(3) $0<1-b<1-a<1$



故 $(1-a)^a>(1-b)^b$（正確）

(4) $y=(1-a)^x$ 爲遞減函數

$\therefore\ (1-a)^b<(1-a)^{\frac{b}{2}}$（錯誤）

(5) $\log_a b<\log_a a=1$

$\log_b{}^a>1$

故 $\log_b a>\log_a b$（錯誤）

故選(2)(3)

8. 參考答案：(2)(3)(5)

試題解析：$\angle A+\angle B+\angle C=\pi \Rightarrow \angle C=\pi-(\angle A+\angle B)$

(1) $\cos C=\cos[\pi-(\angle A+\angle B)]=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{-48+15}{65}=-\frac{33}{65}<0$$

(2) $\sin C=+\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(-\frac{33}{65})^2}=\frac{56}{65}$

(3) $\cos B=\frac{12}{13}$ 爲最大，故 $\angle B$ 爲最小角

(4)由 $\cos C<0$ $\therefore$ $\angle C>90°$，知 $\angle C$ 爲最大角，故其對邊 $\overline{AB}$ 爲最長邊

(5) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{3}{5}:\frac{5}{13}:\frac{56}{65}=39:25:56$

故選(2)(3)(5)

9. 參考答案：(1)(3)

試題解析：$\because\ \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+2+3+\cdots+n}=\dfrac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{2n+1}{3}$

$$\therefore\ S_n=\frac{2\cdot 1+1}{3}+\frac{2\cdot 2+1}{3}+\frac{2\cdot 3+1}{3}+\cdots\cdots+\frac{2\cdot n+1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}[2\cdot(1+2+3+\cdots+n)+n]=\frac{n(n+2)}{3}$$

$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{2n+1}{3}$，$n\geq 2$；又 $a_1=S_1=\dfrac{2\cdot 1+1}{3}=1$

$\therefore\ a_n=\dfrac{2n+1}{3}$，$n\in N$ $\quad\therefore\ \langle a_n\rangle$ 爲等差數列

$\Rightarrow\ a_{30}=\dfrac{2\cdot 30+1}{3}=\dfrac{61}{3}$ 不爲整數

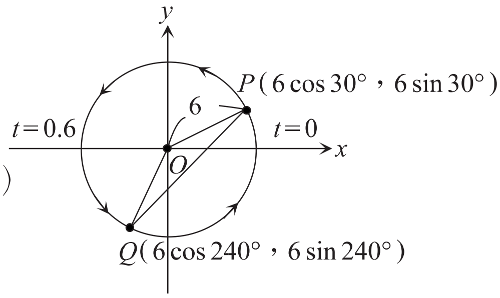
若 a_n 爲整數，則 $3\mid 2n+1\ \Rightarrow\ n=1，4，7，\cdots\ \Rightarrow\ n=3k-2$，$k$ 爲正整數

若 S_n 爲整數，則 $3\mid n$ 或 $3\mid n+2\ \Rightarrow\ n=3，6，9，\cdots=3k$ 或 $n=3k-2$，k 爲正整數

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2n+1}{3}\right)^2}{\dfrac{n^2+2n}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{3(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2}{3\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=\frac{4}{3}$$

故選⑴⑶

10. 參考答案：⑵⑶⑸



試題解析：$P(3\sqrt{3}，3)$，$Q(-3，-3\sqrt{3})$

⑴ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-9\sqrt{3}-9\sqrt{3}=-18\sqrt{3}$（×）

⑵ $\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 150°=9$（○）

⑶ $9=\dfrac{1}{2}\times 6\times d(P，\overleftrightarrow{OQ})\ \Rightarrow\ d(P，\overleftrightarrow{OQ})=3$（○）

⑷ $\overline{PQ}=\sqrt{2(3+3\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}(3+3\sqrt{3})\neq 9$（×）

⑸ $\because$ 每過 0.1 秒，逆時針轉 30° $\Rightarrow$ 每過 1 秒，轉 $300°=\dfrac{5}{3}\pi$

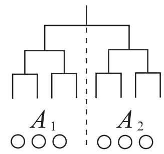
$\therefore$ t 秒時，質點在 $\left(6\cos\dfrac{5t}{3}\pi，6\sin\dfrac{5t}{3}\pi\right)$

$\Rightarrow$ 在 y 軸正射影 $\left(0，6\sin\dfrac{5t\pi}{3}\right)$（○）

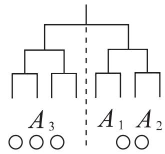
故選⑵⑶⑸

11. 參考答案：⑶⑸

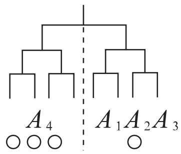
試題解析：⑴ A_2 得亞軍之機率 $=\dfrac{C^6_3\times C^3_3}{\dfrac{C^8_4\times C^4_4}{2!}}=\dfrac{4}{7}$（$A_1$，$A_2$ 在不同組）



⑵ A_3 得亞軍之機率 $=\dfrac{C^5_3\times C^2_2}{\dfrac{C^8_4\times C^4_4}{2!}}=\dfrac{2}{7}$（$A_3$ 和 A_1，A_2 不同組）



⑶ A_4 得亞軍之機率 $=\dfrac{C^4_1\times C^3_3}{\dfrac{C^8_4\times C^4_4}{2!}}=\dfrac{4}{35}$（$A_4$ 和 A_1，A_2，A_3 不同組）



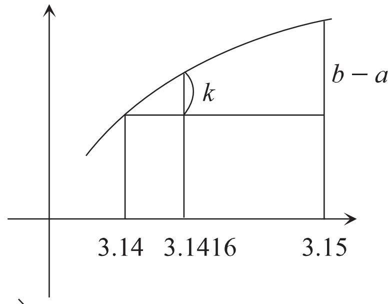
⑷ A_5 得亞軍之機率 $=\dfrac{1}{\dfrac{C^8_4\times C^4_4}{2!}}=\dfrac{1}{35}$

⑸ A_6 不可能得亞軍，故機率 $=0$

故選⑶⑸

第貳部分：選填題

A. 參考答案：$(21，4)$（⑫ 2　⑬ 1　⑭ 4）



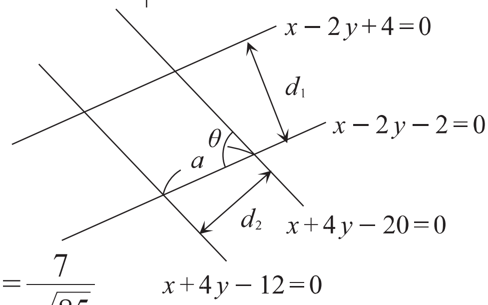
試題解析：$\dfrac{k}{b-a}=\dfrac{16}{100}$

$k=\dfrac{4}{25}(b-a)$

$\log 3.1416=a+\dfrac{4(b-a)}{25}$

$=\dfrac{21a+4b}{25}$

B. 參考答案：8（⑮ 8）



試題解析：由圖可知

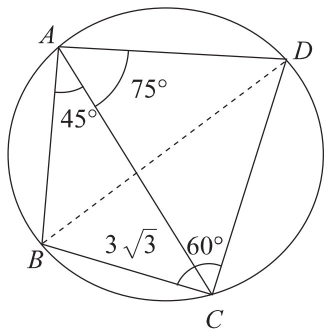
$d_1=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$，$d_2=\dfrac{8}{\sqrt{17}}$

$|\cos\theta|=\dfrac{|(1，-2)\cdot(1，4)|}{|(1，-2)||(1，4)|}=\dfrac{7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}}=\dfrac{7}{\sqrt{85}}$

$a=d_2\csc\theta=\dfrac{8}{\sqrt{17}}\times\dfrac{\sqrt{85}}{6}$

$\therefore$ 面積$=ad_1=8$

C. 參考答案：$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$（⑯ 9　⑰ 2）



試題解析：$\angle BAD=45°+75°=120°$

$\Rightarrow\ \angle BCD=60°$

在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle BCD$ 中

$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 45°}=2R=\dfrac{\overline{BD}}{\sin 60°}$

$\Rightarrow\ \overline{BD}=\dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

D. 參考答案：$(\dfrac{-117}{125}，\dfrac{44}{125})$（⑱ −　⑲ 1　⑳ 1　㉑ 7　㉒ 4　㉓ 4）

試題解析：令 $\angle POQ=\theta\ \Rightarrow\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}，\sin\theta=\dfrac{4}{5}$

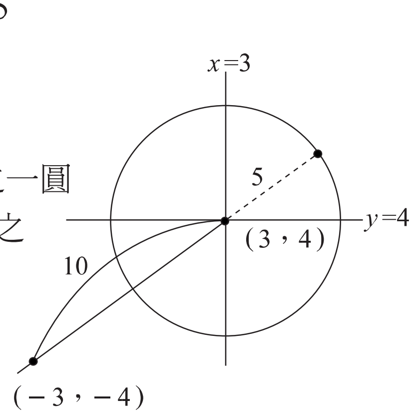
$\angle POR=3\theta$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cdot(\dfrac{3}{5})^3-3(\dfrac{3}{5})=\dfrac{-117}{125}$

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3\cdot(\dfrac{4}{5})-4(\dfrac{4}{5})^3=\dfrac{44}{125}$

$\therefore\ R(\dfrac{-117}{125}，\dfrac{44}{125})$

E. 參考答案：225（㉔ 2　㉕　2　㉖ 5）



試題解析：$(\alpha-3)^2+(\beta-4)^2=25$ 表圓心 $O(3，4)$，$r=5$ 之一圓

$(\alpha+3)^2+(\beta+4)^2$ 之 Max 表 $(-3，-4)$ 至圓之

最大距離平方$=(10+5)^2$

$=225$

F. 參考答案：165π（㉗ 1　㉘ 6　㉙ 5）

試題解析：如右圖，設圓 C 之圓心為 $P(-5, 2, 0)$，

半徑為 $r=\sqrt{144}=12$，則

可設球面 S 之球心為 $Q(-5, 2, z)$

又 S 與平面 $x=8$ 相切，

得球半徑為 $R=8-(-5)=13$

在 $\triangle APQ$ 中，$z^2+12^2=13^2 \Rightarrow z=\pm 5$

得球心 $Q(-5, 2, \pm 5)$，

即 S 有兩可能 S_1，S_2

由右圖可知；

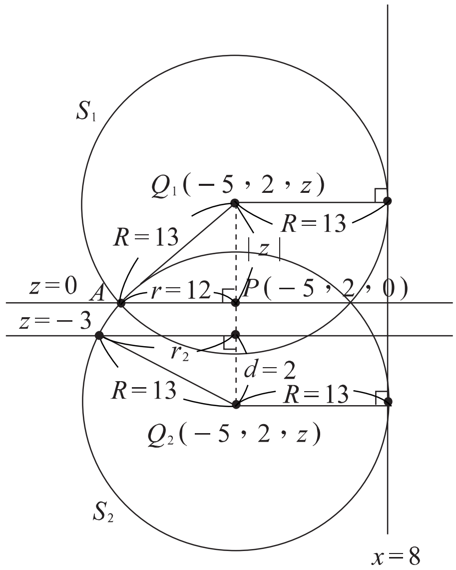
S_2 被平面 $z+3=0$ 所截出的圓 C_2 面積較大

設 C_2 之半徑為 r_2，則

S_2 球心 Q_2 至平面 $z+3=0$ 之距離為 $d=|-3-(-5)|=2$

可得 C_2 之半徑為 $r_2=\sqrt{13^2-2^2}=\sqrt{165}$

故所求為 C_2 之面積 $A_2=\pi\cdot(\sqrt{165})^2=165\pi$

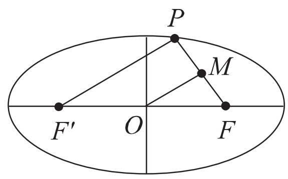


G. 參考答案：10（㉚ 1　㉛ 0）

試題解析：如右圖，設 F' 為 Γ 之另一焦點

$\because$ M 為 $\overline{PF}$ 之中點且 O 為 $\overline{FF'}$ 之中點 $\Rightarrow$ $\overline{MO}=\frac{1}{2}\overline{PF'}$

$\therefore$ $\overline{PM}+\overline{MO}=\frac{1}{2}(\overline{PF}+\overline{PF'})=\frac{1}{2}\times 20=10$



H. 參考答案：150（㉜ 1　㉝ 5　㉞ 0）

試題解析：$(3^3-2)\times 3!=150$

I. 參考答案：$\frac{4}{15}$（㉟ 4　㊱ 1　㊲ 5）

試題解析：$n(S)=C^{10}_3C^7_3C^4_4\div 2!\times 3!=\frac{10!}{3!\,3!\,4!\,2!}\times 3!=12600$

$n(A)=(C^8_1C^7_3C^4_4+C^8_3C^5_3C^2_2\div 2!)\times 3!=(\frac{8!}{1!\,3!\,4!}+\frac{8!}{3!\,3!\,2!\,2!})\times 3!=3360$

故所求之機率為 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3360}{12600}=\frac{4}{15}$