第壹部分：選擇題（佔 74 分）

一、單選題（佔 18 分）

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.5 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 下列選項中的方程式，何者恰有一個實數解？

(1)方程式 $2^x=\sin x$

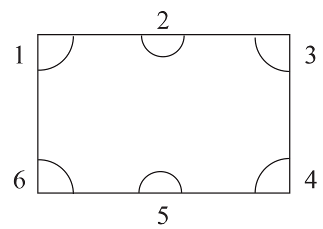
(2)方程式 $(x^2-x+1)^3=2010$

(3)方程式 $\log_3 x=3\sin x$

(4)方程式 $27^{(x^2-4x+1)}=3^{-9}$

(5)方程式 $2\tan x=\cos x$

2. 撞球檯上有編號 1～9 號的 9 顆球，及編號爲 1～6 的 6 個球袋，如圖所示。今將號碼由小到大的球，依序打入任一個球袋中。若在所有的球皆進入偶數號球袋的條件下，試求：9 號球在 4 號球袋中，且是袋中第二個入球的機率與下列選項中的那一個數值最接近？$\begin{pmatrix} 6^9=10077696 \\ 3^9=19683 \end{pmatrix}$



(1) 0.02

(2) 0.03

(3) 0.04

(4) 0.05

(5) 0.06

3. 一個聯立方程組 $\begin{cases} 4x-y+1=0 \\ 2x+y-2z=7 \end{cases}$，再加入那一個方程式之後，其幾何意義代表三個平面相交成一直線？

(1) $x-y+z+4=0$

(2) $x+y+z+2=0$

(3) $x+2y+z=1$

(4) $x+y+z=1$

(5) $2x-y+z=1$

二、多選題（32 分）

說明：第 4 至 7 題，每題各有 4 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，而 B，C 為任意三階方陣，請問下列敘述哪些是正確的？

⑴若 $AB=D$，則 D 與 B 有一列相同

⑵若 $BA=E$，則 E 與 B 有一行相同

⑶若 $AB=F$，則 F 必有一行的各元素均為 0

⑷若 $AB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，則 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

⑸若 $BC=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，則 $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 或 $C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

5. 現有 8 張卡片，每張卡片上分別寫有 1～8 的數字。遊戲規則如下：先付 100 元當作抽獎費，才可抽取一張卡片。當卡片的數字為 X 時，可以獲得 $aX+b$ 元（a，$b\in N$），則下列敘述哪些是正確的？

⑴隨機變數 X 的期望值為 4

⑵變異數 $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{21}{4}$

⑶若 Y 表示獲得的獎金扣除抽獎費的餘額，則 Y 的期望值為 $4a+b-100$

⑷承⑶，若想要讓 Y 的期望值 $=0$，則滿足條件的數對 $(a，b)$ 有 11 組

⑸承⑷，滿足條件的數對 $(a，b)$ 中，a 的最小值為 2

6. 阿宅為了避免重要資料被竊取，就發明了一種編碼的方式，將原始數字資料以編碼的方式傳遞給搖搖，將序對 $(x，y，z)$ 透過 $\begin{cases} 2x+2z=a \\ x+y=b \\ -y+2z=c \end{cases}$，轉換成密碼組 $(a，b，c)$，則下列敘述哪些是正確的？

⑴序對 $(1，3，4)$ 的密碼為 $(10，4，5)$

⑵密碼 $(6，1，4)$ 的原始序對為 $(1，0，2)$

⑶將序對 $(5，y，2)$ 轉成密碼 $(a，b，3)$，可求出 $y+a+b=20$

⑷該編碼公式有可能會將兩組不同的序對轉成同一組密碼

⑸若要將密碼轉成原始的序對，可透過三階方陣 A 來轉換，即 $A\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，

則 A 為 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. 在一個抽樣調查的實驗中，測得 15 組樣本點 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，$(x_3，y_3)$，…，$(x_{15}，y_{15})$，已知 $\sum_{i=1}^{15} x_i=165$，$\sum_{i=1}^{15} y_i=1845$，$\sum_{i=1}^{15}(x_i-\overline{x})^2=64$，$\sum_{i=1}^{15}(y_i-\overline{y})^2=144$，$\sum_{i=1}^{15}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=96$，請問下列敘述哪些是正確的？

⑴ x 與 y 之相關係數為 1

⑵用最小平方法求得之 y 對 x 迴歸直線之斜率為 1

⑶迴歸直線通過點 $(11，123)$

⑷用最小平方法求得之 y 對 x 迴歸直線之 y 截距為 111

⑸設 α、β 均為實數，則 $\sum_{i=1}^{15}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2$ 的最小值為 0

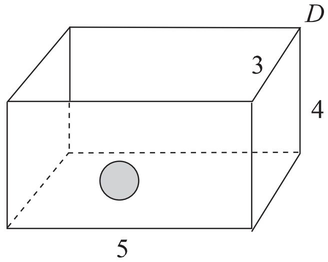
三、選填題（24 分）

說明：A 至 C 題為選填題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8～12）內。每一題完全答對得 8 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.　坐標平面上，有一個以不等式 $0 \le x-y \le 2a$，$0 \le x+y \le 2b$ 定出的長方形區域。已知 $2x-y$ 和 $3x-y$ 這兩個目標函數在長方形區域上分別取到最大值爲 15 和 26，試求數對 $(a，b)=$ ＿（⑧，⑨）＿。

B.　若函數 $y=\log_m(x+3)-1$（$m>0$，且 $m \ne 1$）的圖形恆過一定點 A，且 A 在直線 $ax+by+2=0$ 上，其中 $a>0$ 且 $b>0$，則 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值爲＿⑩＿。

C.　將一個半徑爲 1 的球放入一個長 5，寬 3，高 4 的長方體紙箱中（如圖），若球在箱中可以任意移動，求球心到 D 點的最遠距離爲＿$\sqrt{⑪⑫}$＿。（紙板厚度可忽略不計）



第貳部分：非選擇題（26 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（⑴、⑵），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、有兩個公正的骰子，一個是各面分別標示 1、2、3、4、5、6 等六種點數的正六面體；另一個是各面分別標示 1、2、3、4 等四種點數的正四面體。同時投擲這兩個骰子一次，若正六面體上方出現的點數爲 a；正四面體底面出現的點數爲 b，則：

⑴在 α 爲方程式 $x^2+ax+b=0$ 的實數解之條件下，求 α 爲有理數的機率？（6 分）

⑵從集合 $\left\{ A \mid A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{bmatrix}，a \in \{1、2、3、4、5、6\}，b \in \{1、2、3、4\} \right\}$ 中隨機抽取一個矩陣，在此矩陣有乘法反矩陣的條件下，求其行列式值爲正的機率？（6 分）

二、（題組）(甲)一位營養師連續觀察某健康菌種的數量三個星期，得到下列數據：

x（第幾星期）	1	2	3
y（數量單位：隻）	800	500	400

問題⑴：將上列數據代入 $y=a+bx$，得到 $a+b=800$，$a+2b=500$，$a+3b=400$

上列方程組可改寫成下列形式

$M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$。請分別寫出 M 與 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$。（4 分）

(乙)承(甲)，她從參考文獻中得知，該菌種的數量與時間之間的關係，可用直線

L：$y=a+bx$ 預估 y 值最適當。直線 L 的係數 a 與 b 滿足形式

$M^t M\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=M^t\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ 其中 M^t 是 M 的轉置矩陣。

試回答下列問題：

問題⑵：利用上述方法求出 a，b 值，並寫出 L 的直線方程式。（5 分）

問題⑶：利用直線 L 算出該菌種最快在幾星期後滅絕（即 $y<1$）？（取整數）（5 分）