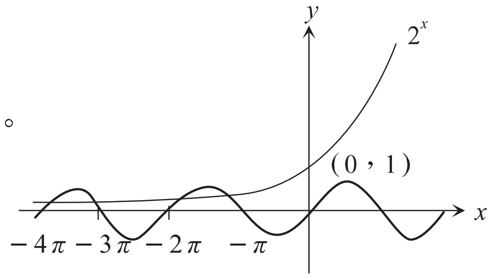
臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第一次聯合模擬考
數學甲詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：⑷

試題解析：⑴如右圖，$y=2^x$ 與 $y=\sin x$，不只有一個交點。



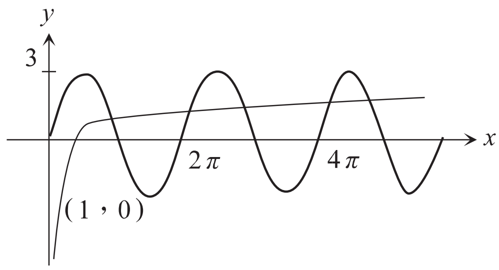
⑵因 $x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ $x^2-x+1=\sqrt[3]{2010}$，

又 $y=x^2-x+1$ 與 $y=\sqrt[3]{2010}$ 有 2 個交點

故 $(x^2-x+1)^3=2010$ 有 2 個實數解

⑶如右圖，$y=\log_3 x$ 與 $y=3\sin x$ 兩函數圖形交點不只一個。



⑷原式為 $3^{3x^2-12x+3}=3^{-9}$ $\Rightarrow$ $3x^2-12x+12=0$

得 $x=2$ 恰一實根

⑸原式 $\frac{2\sin x}{\cos x}=\cos x$

$\Rightarrow$ $2\sin x=\cos^2 x=1-\sin^2 x$

$\Rightarrow$ $\sin^2 x+2\sin-1=0$

$\Rightarrow$ $\sin x=-1\pm\sqrt{2}$（減號不合）

又 $y=sin\,x$ 與 $y=-1+\sqrt{2}$ 兩個函數圖形交點不只一個

故選⑷

2. 參考答案：⑷

試題解析：$\frac{C_1^8\cdot 2^7\cdot 1\cdot 1}{3^9}=\frac{1024}{19683}\doteq 0.052$

故選⑷

3. 參考答案：⑴

試題解析：將 $\begin{cases}4x\text{-}y+1=0\\2x+y-2z=7\end{cases}$ 化為參數式 $\begin{cases}x=t\\y=4t+1\\z=3t-3\end{cases}$

再分別代入⑴、⑵、⑶、⑷、⑸，得第⑴選項等號成立，

即 $x-y+z+4=t-4t-1+3t-3+4=0$

故選⑴

二、多選題

4. 參考答案：⑴⑵

試題解析：⑴○：取 $B=\begin{bmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{bmatrix}$ $\therefore$ $AB=\begin{bmatrix} a & x & p \\ a+b & x+y & p+q \\ c & z & r \end{bmatrix}=D$

$\therefore$ D 與 B 有一列相同

⑵○：取 $B=\begin{bmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{bmatrix}$ $\therefore$ $BA=\begin{bmatrix} a+x+p & x & 0 \\ b+y+q & y & 0 \\ c+z+r & z & 0 \end{bmatrix}=E$

$\therefore$ E 與 B 有一行相同

⑶×：同⑴，F 中不一定有一行的各行素均為 0

⑷×：舉反例取 $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

⑸×：舉反例取 $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. 參考答案：⑵⑷⑸

試題解析：⑴×：$E(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+\cdots+8\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$

⑵○：$Var(X)=(-\frac{7}{2})^2\times\frac{1}{8}+(-\frac{5}{2})^2\times\frac{1}{8}+(-\frac{3}{2})^2\times\frac{1}{8}+(-\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{8}$

$+(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{8}+(\frac{3}{2})^2\times\frac{1}{8}+(\frac{5}{2})^2\times\frac{1}{8}+(\frac{7}{2})^2\times\frac{1}{8}=\frac{21}{4}$

⑶×：$E(Y)=E(aX+b-100)=aE(X)+b-100=\frac{9}{2}a+b-100$

⑷○：$E(Y)=0$ $\quad\frac{9}{2}a+b-100=0$ $\quad 9a+2b=200$

$\therefore$ $a=2$，4，$\cdots$，22 有 11 組

⑸○：a 的最小值為 2

6. 參考答案：⑴⑵⑸

試題解析：⑴○：$(1，3，4)$ 代入 $2\times1+2\times4=10$；$1+3=4$；$-3+2\times4=5$

密碼 $(10，4，5)$

⑵○：$\begin{cases} 2x+2z=6\cdots(1) \\ x+y=1\cdots(2) \\ -y+2z=4\cdots(3) \end{cases}$ $\quad(2)+(3)\quad x+2z=5$ 和⑴解出 $x=1$，$y=0$，$z=2$

⑶×：$\begin{cases} 2\cdot5+2\cdot2=14 \\ 5+y=b \\ -y+2\cdot2=3 \end{cases}$，$y=1$，$b=6$，$a=14$ $\Rightarrow$ $y+a+b=21$

⑷╳：$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{vmatrix}=2\neq0$該方程組恰有一組解，⑷錯誤

⑸◯：原編碼公式可寫成$\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&2\\1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-\frac{1}{2}&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-\frac{1}{2}&1&1\end{bmatrix}$$

故選⑴⑵⑸

7. 參考答案：⑴⑶⑸

試題解析：⑴◯：$r=\dfrac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}}\sqrt{S_{yy}}}=\dfrac{\Sigma x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}}{\sqrt{\Sigma x_i^{\,2}-n\overline{x}^{\,2}}\sqrt{\Sigma y_i^{\,2}-n\overline{y}^{\,2}}}=\dfrac{96}{\sqrt{64}\cdot\sqrt{144}}=1$

⑵╳：斜率$=\dfrac{S_y}{S_x}\cdot r=\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{64}}\times1=\dfrac{3}{2}$

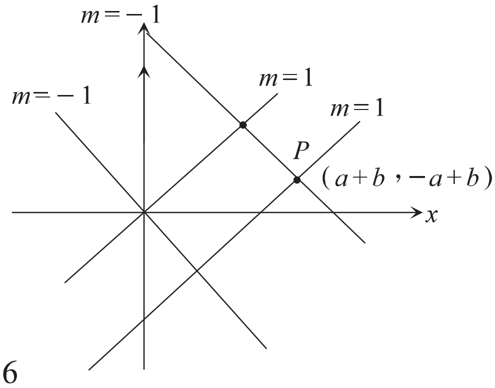
⑶◯：迴歸直線恆過平均點$(\overline{x}，\overline{y})$，即$(11，123)$

⑷╳：迴歸直線$(y-123)=\dfrac{3}{2}(x-11)\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}x+106.5$　$\therefore$ y截距為 106.5

⑸◯：因相關係數為 1，所以$\sum\limits_{i=1}^{15}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2=0$

三、選填題

A. 參考答案：2，9（⑧ 2　⑨ 9）



試題解析：不等式$\begin{matrix}0\le x-y\le2a\\0\le x+y\le2b\end{matrix}$之長方形區域如右圖

因目標函數$2x-y$和$3x-y$分別是斜率為

2,3 的直線

所以，其最大值發生於點$P(a+b，-a+b)$

得$\begin{cases}2(a+b)-(-a+b)=15\\3(a+b)-(-a+b)=26\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+b=15\\4a+2b=26\end{cases}$

得$a=2$，$b=9$

B. 參考答案：8（⑩ 8）

試題解析：顯然 A 點為 $(-2，-1)$ 代入直線中，$-2a-b+2=0 \Rightarrow 2a+b=2$

$$(2a+b)\left(\frac{2}{a}+\frac{4}{b}\right)\geq(2+2)^2 \Rightarrow \frac{2}{a}+\frac{4}{b}\geq 8$$

C. 參考答案：$\sqrt{29}$（⑪ 2　⑫ 9）

試題解析：定坐標系，D 點坐標 $(0，5，4)$，球心放在角落處，其坐標為 $(2，1，1)$

故所求距離為 $\sqrt{2^2+4^2+3^2}=\sqrt{29}$

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{5}{12}$

試題解析：(1) $x^2+ax+b=0$

有實數解 $\Leftrightarrow D=a^2-4b\geq 0$，列表如下

有有理根 $\Leftrightarrow D=a^2-4b$ 為完全平方數或 0，列表如下（給 3 分）

a	1	2	3	4	5	6
b	1234	1 234	1 2 34	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
D 值	不合	0 不合	5 1 不合	12,8,4,0	21,17,13,9	32,28,24,20

其中圈選者，滿足有有理根

$\therefore$ 滿足題意的條件機率為 $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$（給 3 分）

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow (2-a)(a-b)(b-2)\neq 0$

$\therefore$ $a\neq 2$ 且 $b\neq 2$ 且 $a\neq b$，列表如下（給 3 分）

a	1	3	4	5	6
b	3，4	1，4	1，3	1，3，4	1，3，4

共 12 組

又 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & b \\ 4 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}>0$ 之解有

$(a，b)=(3，1)，(3，4)，(4，1)，(5，1)，(6，1)$ 共 5 組，

故所求機率為 $\frac{5}{12}$（給 3 分）

二、參考答案：(1)參考下方解析　(2) $y=\frac{2900}{3}-200x$　(3) 5

試題解析：(1)依題意，列式得 $a+b=800$，$a+2b=500$，$a+3b=400$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 800 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$　$\therefore M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$（給 2 分），$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 800 \\ 500 \\ 400 \end{bmatrix}$（給 2 分）

⑵ $M^t=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$代入

得$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}800\\500\\400\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}3&6\\6&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1700\\3000\end{bmatrix}$又$\begin{bmatrix}3&6\\6&14\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}14&-6\\-6&3\end{bmatrix}$

所以$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}14&-6\\-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1700\\3000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2900}{3}\\-200\end{bmatrix}$

即$a=\frac{2900}{3}$（給 2 分），$b=-200$（給 2 分）

且L的方程式為$y=\frac{2900}{3}-200x$（給 1 分）

⑶因$y<1$，得$\frac{2900}{3}-200x<1$

$\Rightarrow\ x>\frac{2987}{600}\doteqdot 4.\sim$，故$x$取 5（給 5 分）