臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第一次聯合模擬考
數學乙詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：(4)

   試題解析：將 12 個邊分成以下 3 組

   ① $\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{AD}$，$\overline{AE}$　② $\overline{BC}$，$\overline{CD}$，$\overline{DE}$，$\overline{EB}$　③ $\overline{FB}$，$\overline{FC}$，$\overline{FD}$，$\overline{FE}$

   依序在 3 組中各選一條，且已取過的頂點則不再重複選取

   因此共有 $4\times2\times1=8$（種）

2. 參考答案：(3)

   試題解析：設 $x=2+i\Rightarrow(x-2)^2=-1$　$\therefore\ x^2-4x+5=0$

   $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-4x+4)+6x-12$

   因此 $f(2+i)\cdot f(2-i)=[(6(2+i)-12][6(2-i)-12]=36$

二、多選題

3. 參考答案：(2)(3)(4)

   試題解析：(1)若 $P_1=P_2$，則第 2 次擲骰子必須出現 5 點

   故機率為 $\frac{1}{6}$

   (2)若 P_1 和 P_2 相鄰，則第 2 次擲骰子必須出現 1 點或 4 點或 6 點

   故機率為 $\frac{1}{2}$

   (3)若 $P_2=A$，則兩次點數和為 5 或 10

   故機率為 $\frac{4+3}{36}=\frac{7}{36}$

   (4)若 $P_2=C$，則兩次點數和為 2，7 或 12

   故機率為 $\frac{1+6+1}{36}=\frac{2}{9}$

   (5)若 $P_1=A$，則第一次出現 5 點，機率為 $\frac{1}{6}$

   $P_2=A$，由(3)小題可知機率為 $\frac{7}{36}$

   又 $P_1=A$ 且 $P_2=A$ 表示兩次皆出現 5 點，機率為 $\frac{1}{36}$

   由排容原理，$P_1=A$ 或 $P_2=A$ 之機率為 $\frac{1}{6}+\frac{7}{36}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$

4. 參考答案：(1)(2)(4)(5)

試題解析：由迴歸直線性質可知

$(\overline{X}，\overline{Y})$ 在直線 $y=1.31x-0.73$ 上

$(\overline{X}，\overline{Y})$ 在直線 $x=0.63+0.74y$ 上

故有 $\begin{cases}\overline{Y}=1.31\overline{X}-0.73\\ \overline{X}=0.63+0.74\overline{Y}\end{cases}$ 可解出 $\overline{X}$ 及 $\overline{Y}$

另一方面 $1.31=R_{xy}\cdot\dfrac{S_y}{S_x}$

$0.74=R_{xy}\cdot\dfrac{S_x}{S_y}$

兩式相乘則有 $1.31\times0.74=R_{xy}^2$，可求出相關係數 R_{xy}

將 $x=3.7$ 代入小音所求之產量對面積的迴歸直線

可預估產量 $y=1.31\times3.7-0.73=4.117\approx4.12$ 公噸

5. 參考答案：(1)(2)(3)

試題解析：由二項式定理

$$\begin{aligned}x^{100}+x+1&=[(x+1)-1]^{100}+x+1\\&=(x+1)^3\cdot Q(x)+C_2^{100}(x+1)^2\cdot(-1)^{98}+C_1^{100}(x+1)\cdot(-1)^{99}\\&\quad+C_0^{100}(-1)^{100}+x+1\\&=(x+1)^3Q(x)+4950(x+1)^2-100(x+1)+x+2\end{aligned}$$

故 $x^{100}+x+1$ 除以 $(x+1)^3$ 之餘式為 $4950x^2+9801x+4852$

即 $a=4950$，$b=9801$，$c=4852\Rightarrow a-b+c=1$

或 $x^{100}+x+1=(x+1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$

$x=-1$ 代入，也可得 $a-b+c=1$

6. 參考答案：(1)(3)(5)

試題解析：X、Y 皆為常態分佈，由曲線圖可知，$S_X>S_Y$，故(1)正確

設 X：x_1，x_2，$\cdots$，x_{1000}，平均數 $\overline{X}=32$

Y：y_1，y_2，$\cdots$，y_{1000}，平均數 $\overline{Y}=9$

則 Z：z_1，z_2，$\cdots$，z_{1000}，其中 $z_k=x_k+y_k$，$k=1$，2，$\cdots$，1000，平均數 $\overline{Z}$

$$\Rightarrow\ \overline{Z}=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}z_k=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}(x_k+y_k)=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}x_k+\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}y_k=\overline{X}+\overline{Y}=41$$

故(5)正確

$$\begin{aligned}S_z^{\,2}&=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}(z_k-\overline{Z})^2=\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}[(x_k+y_k)-(\overline{X}+\overline{Y})]^2\\&=\frac{1}{1000}\left(\sum_{k=1}^{1000}(x_k-\overline{X})^2+2\sum_{k=1}^{1000}(x_k-\overline{X})(y_k-\overline{Y})+\sum_{k=1}^{1000}(y_k-\overline{Y})^2\right)\\&=S_X^{\,2}+S_Y^{\,2}+\frac{1}{500}\sum_{k=1}^{1000}(x_k-\overline{X})(y_k-\overline{Y})\end{aligned}$$

但無法確定 $\sum_{k=1}^{1000}(x_k-\overline{X})(y_k-\overline{Y})$ 之正負，故(2)無法判斷

三、選塡題

A. 參考答案：10（⑦ 1 ⑧ 0）

試題解析：$\log_3 x=-x+10$ 之根爲 α，

即 $A(\alpha，-\alpha+10)$ 爲對數函數 $y=\log_3 x$ 圖形和直線 $y=-x+10$ 之交點

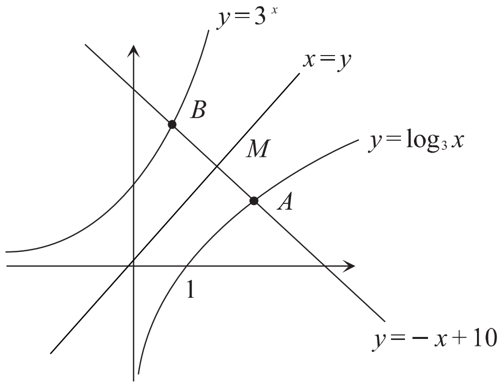
同理，$3^x=-x+10$ 之根爲 β，

即 $B(\beta，-\beta+10)$ 爲指數函數 $y=3^x$ 圖形和直線 $y=-x+10$ 之交點

又 $y=\log_3 x$ 和 $y=3^x$ 圖形對稱於直線 $y=x$

則 $\overline{AB}$ 中點 $M(\frac{\alpha+\beta}{2}，\frac{-\alpha-\beta+20}{2})$ 爲 $y=x$ 和 $y=-x+10$ 之交點

$\Rightarrow\ \frac{\alpha+\beta}{2}=5\quad\therefore\ \alpha+\beta=10$



B. 參考答案：1（⑨ 1）

試題解析：由題設可知，$x_k\in\{0，1，2\}$，$k=1，2，3，4，5$

且 $x_k=0$，$x_k=1$，$x_k=2$ 之機率皆爲 $\frac{1}{3}$

而 Y 可能之值爲 0，1，2，4，8，16，32

如：$Y=8=1\times1\times2\times2\times2$ 表 x_1，x_2，$\cdots$，x_5 中有兩個爲 1，三個爲 2

故期望值爲 $1\times(\frac{1}{3})^5+2\times C_1^5\times(\frac{1}{3})^5+4\times C_2^5\times(\frac{1}{3})^5+8\times C_3^5\times(\frac{1}{3})^5+16\times C_4^5\times(\frac{1}{3})^5+32\times C_5^5\times(\frac{1}{3})^5=1$

C. 參考答案：22（⑩ 2 ⑪ 2）

試題解析：設最少需要 n 年，則 $(1-10\%)^n\le 10\%\ \Rightarrow\ (0.9)^n\le 0.1$

兩邊取對數，$n\cdot\log 0.9\le\log 0.1\ \Rightarrow\ n\ge\frac{1}{1-0.9542}\approx 21.8$

因此最小正整數 $n=22$

D. 參考答案：$\frac{8-\sqrt{34}}{10}<P<1$（⑫ 8 ⑬ 3 ⑭ 4 ⑮ 1 ⑯ 0）

試題解析：$P_1=(1-P)^3+C_1^3(1-P)^2\cdot P=(1-P)^2(1+2P)$

$P_2=(1-P)^6+C_1^6(1-P)^5\cdot P+C_2^6(1-P)^4\cdot P^2=(1-P)^4(10P^2+4P+1)$

若 $P_1>P_2$，則 $(1-P)^2(1+2P)>(1-P)^4(10P^2+4P+1)$

$\Rightarrow\ 1+2P>(1-P)^2(10P^2+4P+1)$

$\Rightarrow\ P^2(10P^2-16P+3)<0$

得 $\frac{8-\sqrt{34}}{10}<P<\frac{8+\sqrt{34}}{10}$

又 $0<P<1$，故 $\frac{8-\sqrt{34}}{10}<P<1$

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：見詳解

試題解析：設 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 之餘式為 $r(x)$，$\deg r(x) \le 2$

即存在多項式 $q(x)$ 使得 $g(x)=f(x)q(x)+r(x)$……①（2 分）

又 $f(x)=x^3-2009x^2-x+2009=(x-1)(x+1)(x-2009)$

$f(1)=f(-1)=f(2009)=0$（3 分）

且 $g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(2009)=0$，同理 $g(-1)=g(2009)=0$（3 分）

又由① $g(1)=r(1)=0$

$g(-1)=r(-1)=0$

$g(2009)=r(2009)=0$（3 分）

因為餘式 $r(x)$ 最多為 2 次，故得知 $r(x)=0$，即 $g(x)$ 能被 $f(x)$ 整除（3 分）

《另解》

$f(x)=(x-1)(x+1)(x-2009)$（2 分）

$\therefore f(1)=f(-1)=f(2009)$（3 分）

又 $g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(2009)=0 \Rightarrow x-1 \mid g(x)$（2 分）

同理 $g(-1)=0 \Rightarrow x+1 \mid g(x)$（2 分）

$g(2009)=0 \Rightarrow x-2009 \mid g(x)$（2 分）

故 $(x-1)(x+1)(x-2009) \mid g(x)$ 即 $f(x) \mid g(x)$（3 分）

二、參考答案：⑴ 810 個 ⑵見詳解 ⑶ 9 種

試題解析：⑴設 $x=100a+10b+c$ 為三位數

其中 a 可為 1，2，…，8，9

b 可為 0，1，2，…，9

c 可為 1，2，3，…，9

共有 $9\times10\times9=810$（個）

⑵如上題所設，$x=100a+10b+c$，則 $y=100c+10b+a$

故 $z=|x-y|=|99a-99c|=99|a-c|$

又 a，c 皆為 1～9 之正整數 $\Rightarrow$ $|a-c|$ 為非負整數，即 z 必為 99 之倍數

⑶ $|a-c|$ 可能為 0，1，2，…，8，故 $z=99|a-c|$ 有 9 種不同的值