臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第二次聯合模擬考
數學甲詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：⑷

試題解析：⑴$f(1)>0 \Rightarrow p+q>0$，$f(0)<0 \Rightarrow 4p+q<0 \Rightarrow -4p-q>0$

二式相加 $\Rightarrow -3p>0 \Rightarrow p<0$，又$\because p+q>0 \quad \therefore q>0$

⑵$f(-\frac{1}{2})=\frac{25}{4}p+q=\frac{25p+4q}{4}=\frac{9p+4(4p+q)}{4}<0$

$f(\frac{5}{2})=\frac{1}{4}p+q=\frac{p+4q}{4}=\frac{(p+q)+3q}{4}>0$

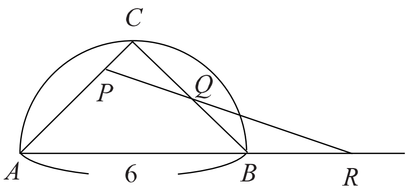
$f(5)=9p+q=5p+(4p+q)<0$

故選⑷

2. 參考答案：⑴

試題解析：$\angle C=90°$，$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{4}$，$\overline{AC}=\overline{BC}=3\sqrt{2}$，$\overline{BQ}=\sqrt{2}$

$\triangle PQC$中，$\sin\angle PQC=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \therefore \sin RQB=\frac{1}{\sqrt{5}}$



由外角定理，$\angle PQB+\angle QRB=\frac{\pi}{4}$

$\sin\angle QRB=\sin(\frac{\pi}{4}-\angle RQB)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos RQB-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin RQB$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\triangle RQB$中，由正弦定理$\frac{\overline{BQ}}{\sin\angle QRB}=\frac{\overline{QR}}{\sin\angle QBR}$

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\frac{\overline{QR}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \therefore \overline{QR}=\sqrt{10}$

故選⑴

3. 參考答案：⑶

試題解析：由題意，所求為 $2.512^{1.5}$

$\log 2.512^{1.5}=1.5\times 0.4001=0.60015\approx 0.6002$

又 $\log 3.983=0.6002$

$\therefore 2.512^{1.5}=3.983\approx 4$

故選⑶

二、多選題

4. 參考答案：⑵⑶⑷⑸

試題解析：⑴正弦定理要在同一三角形中使用（×）

⑵$\overline{AC}=5\sqrt{2}$，$\overline{PC}=8$，$\cos C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{50+64-\overline{AD}^{2}}{2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 8}$，$\overline{AP}=\sqrt{34}$（◯）

⑶$\cos\angle APC=\dfrac{64+34-50}{2\cdot 8\cdot\sqrt{34}}=\dfrac{3}{\sqrt{34}}>\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ \angle APC<60°$（◯）

⑷$\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BP}$，$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CQ}$，又$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CQ}$

$\therefore\ \overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC}$（◯）

⑸$\triangle ABP=\triangle ACQ$，$\dfrac{\triangle ABP\ 周長}{2}\times r_1=\dfrac{\triangle ACQ\ 周長}{2}\times r_2$

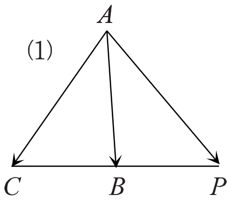
但$\overline{AP}<\overline{AQ}$ $\therefore\ r_1>r_2$（◯）

故選⑵⑶⑷⑸

5. 參考答案：⑵⑸

試題解析：⑴由共線定理P，B，C三點共線

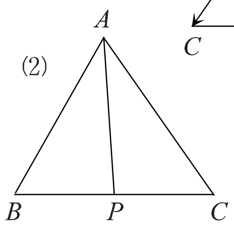
$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，如圖（×）



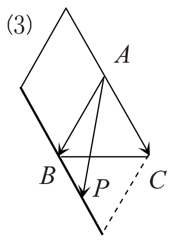
⑵P為$\overline{BC}$中點，由中線定理

$\overline{AB}^{2}+\overline{AC}^{2}=2(\overline{AP}^{2}+\overline{BP}^{2})=2$

$\overline{AP}^{2}+\dfrac{1}{4}\overline{BC}^{2}=1$ $\therefore\ 4\overline{AP}^{2}+\overline{BC}^{2}=4$（◯）

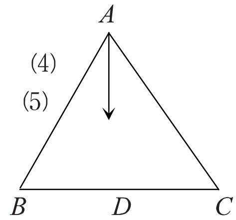


⑶一線段長度為2（×）



⑷$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta$

$\therefore\ -1<\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<1$（×）



⑸$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AP}$夾角交為銳角（◯）

6. 參考答案：⑴⑵⑶⑷

試題解析：$P(0，0，3)$，$Q(6，0，4)$，$S(0，6，2)$

PQS所在平面方程式：$x-y-6z=-18$，xy平面：$z=0$

⑴$(6，6，r)$代入$x-y-6z=-18$，$z=3$（◯）

⑵$(1，-1，-6)\cdot(0，0，1)=\sqrt{38}\cos\theta$，

$\cos\theta=\dfrac{-6}{\sqrt{38}}$，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1}{19}}>\dfrac{1}{5}$（◯）

⑶$\overrightarrow{PQ}=(6，0，1)$，$\overrightarrow{PS}=(0，6，-1)$，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}<0$（◯）

⑷$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}=(0，6，-1)$（◯）

⑸E在$PQRS$的投影點不是Q（×）

7. 參考答案：⑴⑵⑷

試題解析：⑴由 $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.40 \\ 0.32 \end{bmatrix}\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}$

知下個月「市佔率」最高之車行為 B 車行，最低為 A 車行

⑵設長期發展後各車行之市佔率依序為 x，y，$1-x-y$

應滿足：$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1-x-y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x+y=2 \\ x-6y=-2 \\ 6x+7y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{43} \\ y=\dfrac{16}{43} \end{cases}$$

得 A，B，C 車行之市佔率為 $\dfrac{10}{43}$，$\dfrac{16}{43}$，$\dfrac{17}{43}$

知最高為 C 車行

故選⑴⑵⑷

三、選填題

A. 參考答案：$\dfrac{-1}{2}$（⑧ 1　⑨ 2）

試題解析：⑴ $A^2=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

設 $A^k=\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 $A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

由數學歸納法得到：$A^n=\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\forall\, n\in N$

⑵ $\sum\limits_{k=1}^{n} A^k=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} n & -(1+2+3+\cdots+n) \\ 0 & n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & -\dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n\cdot c_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{n(n+1)}{2}}{n\times n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2-n}{2\cdot n^2}=-\frac{1}{2}$$

B. 參考答案：7（$x-y-z=-3\sqrt{3}$）（⑩ 7）

試題解析：$S：x^2+y^2+z^2=9$

$\triangle ABC$所在的平面方程式：$x-y-z=-1$

設所求$x-y-z+d=0 \Rightarrow \dfrac{|d|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=3$，$d=\pm 3\sqrt{3}$

又$(0，0，0)$在$x-y-z=-1$與所求平面同一側，取$d=-3\sqrt{3}$

$|m+n+k|=|-2-3\sqrt{3}|\approx 7$

C. 參考答案：$\dfrac{4}{5}$（⑪ 4　⑫ 5）

試題解析：甲勝x回，乙勝y回，平手z回（x，y，z為 0～6 的整數）

甲勝機率$=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$，乙勝機率$=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$，平手機率$=\dfrac{2}{12}$

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x+2y=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ z=0 \end{cases}$

所求$=\dfrac{\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}(\dfrac{5}{12})^3(\dfrac{5}{12})^2(\dfrac{2}{12})^1}{\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}(\dfrac{5}{12})^3(\dfrac{5}{12})^2(\dfrac{2}{12})^1+\dfrac{6!}{5!}(\dfrac{5}{12})^1(\dfrac{5}{12})^5}$

$=\dfrac{60\cdot 5^5\cdot 2}{60\cdot 5^5\cdot 2+6\cdot 5^6}=\dfrac{4}{5}$

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：⑴ 300500 人　⑵ 76％

試題解析：⑴ $5000000\times\dfrac{0.01}{100}+(20000000-5000000)\times\dfrac{2}{100}=300500$（人）

⑵設比例x的人口數施打疫苗

$\Rightarrow x\times\dfrac{0.01}{100}+(1-x)\times\dfrac{2}{100}\le\dfrac{100000}{20000000}=\dfrac{1}{200}$

$\Rightarrow 0.02x+4-4x\le 1$

$\Rightarrow x\ge\dfrac{3}{3.98}\approx 0.7538$（4 分）

$\therefore$ 至少要有 76％人口比例施打疫苗（2 分）

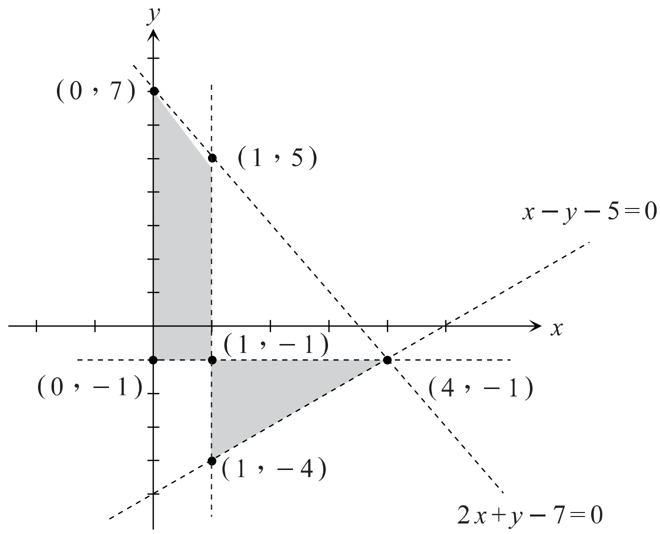
二、參考答案：⑴參閱解析　⑵參閱解析　⑶$\dfrac{23}{2}$　⑷最大值$=15$，最小值$=-1$

試題解析：⑴為使 log 有意義 $\Rightarrow \begin{cases} 10-2x+2y>0 \\ 7-2x-y>0 \\ x>0，x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-5<0 \\ 2x+y-7<0 \\ x>0，x\neq 1 \end{cases}$（4 分）

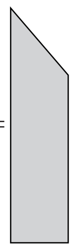
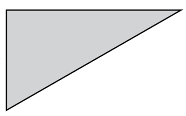
⑵若 $x>1 \Rightarrow 10-2x+2y<7-2x-y \Rightarrow y<-1$

若 $0<x<1 \Rightarrow 10-2x+2y>7-2x-y \Rightarrow y>-1$

圖示如右：



（4 分）

⑶面積$=$  $+$  $=\dfrac{(8+6)\times 1}{2}+\dfrac{3\times 3}{2}$

$=\dfrac{23}{2}$（2 分）

⑷將該區域各頂點代入 $4x+y$，$(4，-1)$代入得最大值$=4\times 4-1=15$（2分）

$(0，-1)$代最小值$=4\times 0-1=-1$（2 分）