臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第二次聯合模擬考
數學乙詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：⑵

試題解析：轉移矩陣$\begin{bmatrix}0.95 & 0.2\\ 0.05 & 0.8\end{bmatrix}$，設$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，其中$x$表已婚女性人數，$y$表單身女性人數，因爲$AX=X \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0.95 & 0.2\\ 0.05 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$\begin{cases}0.95x+0.2y=x\\ 0.05x+0.8y=y\end{cases} \Rightarrow x=4y$，又$x+y=100000 \Rightarrow x=80000$（人）

2. 參考答案：⑶

試題解析：由輾轉相除法可知$d(x)=x^3-4x^2+3x+1$爲$f(x)$與$g(x)$之 HCF

$\Rightarrow f(x)=d(x)\cdot(2x+3)$；$g(x)=d(x)\cdot(3x+5)$

則$f(x)=0$與$g(x)=0 \Leftrightarrow d(x)=0$

$\because d(-1)d(0)<0$，$d(1)d(2)<0$，$d(2)d(3)<0$

$\therefore$ 由勘根定理可知：$d(x)=0$在開區間$(-1，0)$，$(1，2)$，$(2，3)$中各有一個實根

$\Rightarrow m=-1 \vee m=1 \vee m=2$

$\Rightarrow m$之最小值爲-1

二、多選題

3. 參考答案：⑵⑸

試題解析：⑴⑵$f(p)=$比兩場的機率＋比三場的機率$=p^2+C^2_1P^2(1-p)$

⑶$f(p)=p^2+C^2_1P^2(1-p)=-2p^3+3p^2$

$\Rightarrow f(p)-p=-2p^3+3p^2-p=p(2p-1)(1-p)$

$\because \frac{1}{2}<p<1 \quad \therefore p(2p-1)(1-p)>0 \Rightarrow f(p)>p$

所以就丫倫而言，三戰兩勝的獲勝機率較高

⑷⑸獲利期望值$>0 \Rightarrow 32f(p)-27>0 \Leftrightarrow 32(3p^2-2p^3)-27>0$

$\Leftrightarrow 64p^3-96p^2+27<0 \Leftrightarrow (4p-3)(16p^2-12p-9)<0$

$\Leftrightarrow p<\frac{3-3\sqrt{5}}{8} \vee \frac{3}{4}<p<\frac{3+3\sqrt{5}}{8}$

又$\frac{1}{2}<p<1$，所以$\frac{3}{4}<p<1$

4. 參考答案：(1)(3)(4)

試題解析：(2) y 對 x 的迴歸線方程式爲 $y-\overline{y}=r\cdot\dfrac{S_y}{S_x}(x-\overline{x})\ \Rightarrow\ y-60=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{8}{6}(x-55)$

(3) $S_z^{\,2}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}[(x_i+y_i)-(\overline{x}+\overline{y})]^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}[(x_i-\overline{x})+(y_i-\overline{y})]^2$

$=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\right]$

$=S_x^{\,2}+2\cdot\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})+S_y^{\,2}=S_x^{\,2}+2rS_xS_y+S_y^{\,2}$

(4) $\because\ S_z^{\,2}=S_x^{\,2}+2rS_xS_y+S_y^{\,2}\ \Leftrightarrow\ r=\dfrac{S_z^{\,2}-S_x^{\,2}-S_y^{\,2}}{2S_xS_y}$

$\therefore$ 當 $S_z=14$ 時 $\Rightarrow\ r=\dfrac{14^2-8^2-6^2}{2\cdot 8\cdot 6}=1$

(5)當 $S_z=1$ 時 $\Rightarrow\ r=\dfrac{1^2-8^2-6^2}{2\cdot 8\cdot 6}<-1$

又 $\because\ |r|\le 1$ $\therefore$ 不存在 r 值使得 $S_z=1$

5. 參考答案：(1)(4)(5)

試題解析：由根與係數的關係可知：$a+b+c=3$，$ab+bc+ca=-1$，$abc=-5$

(1) $\because\ \begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 1 & c\end{vmatrix}=abc-(a+b+c)+2=-5-3+2\ne 0$

$\therefore$ 方陣 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 1 & c\end{bmatrix}$ 具有乘法反方陣

(2)(3) $\because\ \begin{vmatrix} 1 & a & b\\ 1 & b & c\\ 1 & c & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & b\\ 0 & b-a & c-b\\ 0 & c-a & a-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b-a & c-b\\ c-a & a-b\end{vmatrix}$

$=-(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)$

$=-(a+b+c)^2+3(ab+bc+ca)=-12\ne 0$

$\therefore$ P、Q、R 三點不共線且 $\triangle PQR$ 之面積 $=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & a & b\\ 1 & b & c\\ 1 & c & a\end{vmatrix}\right|=6$

(4) $\begin{vmatrix} a & c & b\\ b & a & c\\ c & b & a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & a & b\\ a & b & c\\ b & c & a\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a+b+c & a & b\\ a+b+c & b & c\\ a+b+c & c & a\end{vmatrix}=-(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b\\ 1 & b & c\\ 1 & c & a\end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 1+a & a+c & c+b \\ 1+b & b+a & a+c \\ 1+c & c+b & b+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= -(a+b+c+1)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = 48$$

6. 參考答案：⑶⑸

試題解析：⑴$\because$ 矩陣乘法不具交換性

$\therefore\ (A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2 \neq A^2-B^2$

⑵設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，則 $AB=0$，但 $A \neq O$ 且 $B \neq O$

⑷設 $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$，則 $2A=\begin{bmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{bmatrix}$

所以矩陣 $2A$ 的行列式值 $=2^3\times$(矩陣 A 的行列式值)

三、選填題

A. 參考答案：1400（⑦ 1　⑧ 4　⑨ 0　⑩ 0）

試題解析：設需調查 n 人才能滿足顧客需求，

則 $\hat{p}=\dfrac{400}{1000}=0.4$，由 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\dfrac{0.02}{2}$

$\Leftrightarrow\ n=2400$，所以尚需再調查 $2400-1000=1400$ 人

B. 參考答案：40（⑪ 4　⑫ 0）

試題解析：設 $f(x)=x^5-7x^4-58x^3+16x^2-460x-200$

$\because\ a_1$，a_2，a_3，a_4，a_5 為方程式 $f(x)=0$ 之五根

$\therefore\ f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)$

$\Rightarrow\ (12-a_1)(12-a_2)(12-a_3)(12-a_4)(12-a_5)$

$=f(12)$ 為 $f(x)\div(x-12)$ 之餘式

由綜合除法可知：$f(12)=40$

C. 參考答案：4（⑬ 4）

試題解析：設早上五點半時流浪漢已死亡 t 小時，則

$$\begin{cases} f(t)=13 \\ f(t+2)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-10=(37-10)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{kt} \\ 11-10=(37-10)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k(t+2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=27\left(\dfrac{1}{2}\right)^{kt}\cdots(1) \\ 1=27\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k(t+2)}\cdots(2) \end{cases}$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \text{代入第(1)式} \Rightarrow 3=27\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow t=4$$

D. 參考答案：5（⑭ 5）

試題解析：由二項式定理 $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^4=C^4_0\left(\frac{1}{3}\right)^4+C^4_1\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)+C^4_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$$+C^4_3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3+C^4_4\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$=\frac{1}{81}+4\cdot\frac{2}{81}+6\cdot\frac{4}{81}+4\cdot\frac{8}{81}+1\cdot\frac{16}{81}$$

可知線段長度有 $\frac{1}{81}$，$\frac{2}{81}$，$\frac{4}{81}$，$\frac{8}{81}$，$\frac{16}{81}$ 共五種，且各有 1，4，6，4，1 條

E. 參考答案：2（⑮ 2）

試題解析：兩人喊拳的方式共有 $4\times4=16$ 種，其中可分出勝負的喊法有 $4\times2=8$ 種，所以喊一次即定勝負的機率為 $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，而平手的機率為 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

設喊拳次數的期望值為 E，因為只需喊一次拳的機率為 $\frac{1}{2}$，需出 $(E+1)$ 次拳的機率為 $1-\frac{1}{2}$，所以 $1\cdot\frac{1}{2}+(E+1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=E \Rightarrow E=2$

【另解】喊拳 n 次才定勝負的機率為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$，

因此出拳次數的期望值為 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$

F. 參考答案：$-2\sqrt{2}<a<0$ 或 $a\geq2\sqrt{2}$（⑯ −　⑰ 2　⑱ 2　⑲ 0　⑳ 2　㉑ 2）

試題解析：$2x^2+ax+1=0 \Rightarrow$ 判別式 $D_1=a^2-4\cdot2\cdot1=a^2-8=(a-2\sqrt{2})(a+2\sqrt{2})$

$ax^2+2(a-1)x+(a-1)^2=0 \Rightarrow$ 判別式 $D_2=[2(a-1)]^2-4a(a-1)^2$

$$=4(a-1)^2(1-a)=-4(a-1)^3$$

$x^2-2ax+2a=0 \Rightarrow$ 判別式 $D_3=(-2a)^2-4\cdot2a\cdot1=4a(a-2)$

D_3	+	+	−	−	+	+
D_2	+	+	+	−	−	−
D_1	+	−	−	−	−	+
	$-2\sqrt{2}$	0	1	2	$2\sqrt{2}$	

⑴當 $a=2\sqrt{2}$ 時，$D_1=0$，$D_2<0$，$D_3>0$ ⇒ 滿足題意

⑵當 $a=-2\sqrt{2}$ 時，$D_1=0$，$D_2>0$，$D_3>0$ ⇒ 此三個方程式皆有實根，不合

又 $a\neq 0$

∴ 由上圖可知，此三個方程式恰有二個方程式有實根

$\Leftrightarrow\ -2\sqrt{2}<a<0$ 或 $a\geq 2\sqrt{2}$

G. 參考答案：6360（㉒ 6　㉓ 3　㉔ 6　㉕ 0）

試題解析：$\underbrace{\dfrac{P^5_4}{4}}_{\text{底色的塗法}}\cdot\underbrace{[P^5_4-C^4_1P^4_3+C^4_2P^3_2-C^4_3P^2_1+C^4_4P^1_0]}_{\text{字母顏色搭配的方法}}\times \underset{\text{字母 }A\text{ 顏色的選法}}{4}=30\times 53\times 4=6360$

第貳部分：非選擇題

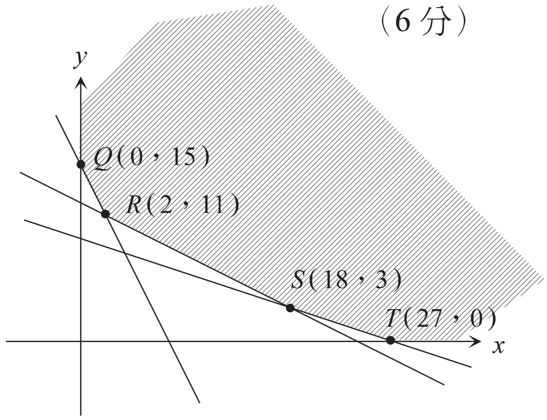
一、參考答案：⑴ $\begin{cases}2x+y\geq 15\\ x+2y\geq 24\\ x+3y\geq 27\\ x\geq 0，y\geq 0，x，y\in Z\end{cases}$

⑵甲類需 2 張，乙類需 11 張時，才會有最低包裝費用 370 元

試題解析：目標函數 $P=20x+30y$ 且由題意可知　（6 分）

$\begin{cases}2x+y\geq 15\\ x+2y\geq 24\\ x+3y\geq 27\\ x\geq 0，y\geq 0，x，y\in Z\end{cases}$（3 分）

所作圖形如右：



其頂點 $Q(0，15)$，$R(2，11)$，$S(18，3)$，$T(27，0)$

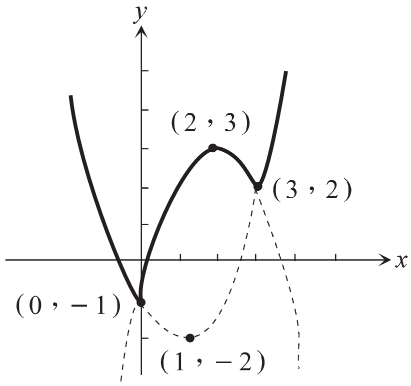
$(x，y)$	$(0，15)$	$(2，11)$	$(18，3)$	$(27，0)$
$P=20x+30y$	450	370	450	540

所以甲類需 2 張，乙類需 11 張時，才會有最低包裝費用 370 元（4 分）

二、參考答案：⑴略　⑵ $-1<k<2\vee k>3$

試題解析：⑴當 $x^2-3x>0$，即 $x<0\vee x>3$ 時 ⇒ $y=x^2-3x+x-1=(x-1)^2-2$（2 分）

當 $x^2-3x<0$，即 $0<x<3$ 時 ⇒ $y=-(x^2-3x)+x-1=-(x-2)^2+3$（2 分）



（4 分）

⑵方程式 $|x^2-3x|+x-1=k$ 的實根個數 $=\begin{cases} y=|x^2-3x|+x-1 \\ y=k \end{cases}$ 兩圖形交點個數，所以由圖可知：$-1<k<2 \vee k>3$（5 分）