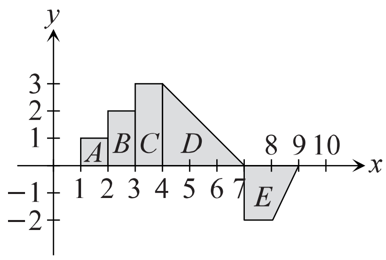
臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第三次聯合模擬考
數學甲詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：⑶

試題解析：$f(x)=\begin{cases} [\,x\,] & ，1 \le x < 4 \\ -x+7 & ，4 \le x < 7 \\ |\,x-8\,|-|\,x-10\,| & ，7 \le x \le 9 \end{cases}$



$\int_1^9 f(x)\,dx = A$、B、C、D、E的有向面積和

$= 1+2+3+\dfrac{9}{2}+(-3)$

$= \dfrac{15}{2}$

2. 參考答案：⑵

試題解析：L_1：$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z-8}{8}$ 恆過 $(3，5，8)$ 及 $(1，2，0)$

L_2：$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-7}{3}=\dfrac{z-9}{9}$ 恆過 $(5，7，9)$ 及 $(3，4，0)$

L_3：$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-9}{-3}=\dfrac{z-7}{-7}$ 恆過 $(2，9，7)$ 及 $(5，6，0)$

設 L_1'，L_2'，L_3' 分別是直線 L_1，L_2，L_3 在 xy 平面的投影

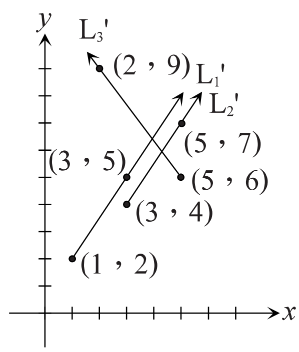
則在平面座標上

L_1' 恆過 $(3，5)$ 及 $(1，2)$

L_2' 恆過 $(5，7)$ 及 $(3，4)$

L_3' 恆過 $(2，9)$ 及 $(5，6)$

其相交情形如圖



其中，L_1' 斜率 $=\dfrac{3}{2}$

L_2' 斜率 $=\dfrac{3}{2}$

L_3' 斜率 $=-1$

3. 參考答案：(5)

試題解析：

$$\begin{array}{c} \\ B \\ R \\ M \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} B & R & M \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}\end{array} \cdot \begin{array}{c} x_0 \\ \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.36 \\ 0.30 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{l} \\ \text{— 12 月 24 日黑黨支持度} \\ \\ \text{— 12 月 24 日觀望的選民} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.36 \\ 0.30 \end{bmatrix}\end{array} = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{bmatrix} 0.328 \\ 0.372 \\ 0.300 \end{bmatrix}\end{array} \text{— 12 月 25 日紅黨支持度}$$

最後紅黨勝選

$$\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x+2y+4z=10x \\ 3x+5y+3z=10y \\ 3x+3y+3z=10z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=0 \cdots\cdots ① \\ 3x-5y+3z=0 \cdots\cdots ② \\ 3x+3y-7z=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①－②得 $5z=4y \Rightarrow y:z=5:4$

令 $y=5t$，$z=4t$ 代入③得 $x=\frac{13}{3}t$

$\therefore\ x:y:z=13:15:12$

因此，長期而言，紅黨支持度勝過黑黨

4. 參考答案：(4)

試題解析：$f(k)=\int_0^1 |x^3-kx^2|\,dx$

$$=\int_0^1 x^2 \cdot |x-k|\,dx \quad (\because\ 0\le k\le 1)$$

$$=\int_0^k x^2 \cdot (k-x)\,dx+\int_k^1 x^2 \cdot (x-k)\,dx$$

$$=\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{k}{3}x^3\right)\Big|_0^k+\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{k}{3}x^3\right)\Big|_k^1$$

$$=-\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{3}k^4+\left(\frac{1}{4}-\frac{k}{3}\right)-\left(\frac{k^4}{4}-\frac{k^4}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}k^4-\frac{k}{3}+\frac{1}{4}$$

$f'(k)=\frac{2}{3}k^3-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$f''(k)=2k^2\ge 0$，圖形凹向上

$\therefore\ k=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 時，$f(k)$ 有最小值

二、多選題

5. 參考答案：(3)(4)

試題解析：$\because\ (b+c):(c+a):(a+b)=18:17:25$

令 $b+c=18t\cdots\cdots$ ①

$c+a=17t\cdots\cdots$ ②

$a+b=25t\cdots\cdots$ ③

$\dfrac{①+②+③}{2}$ 得 $a+b+c=30t$

$\therefore\ a=12t$，$b=13t$，$c=5t$

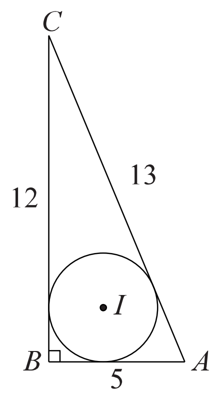
$\therefore\ \sin A:\sin B:\sin C=12:13:5$

$\therefore\ \angle B=90°$，$\cos A=\dfrac{5}{13}$，$\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{-119}{169}$

又 $\triangle ABC$ 面積為 30

$\dfrac{1}{2}\times 12t\times 5t=30\ \Rightarrow\ t=1$

如圖



設內切圓半徑 r

則 $\triangle AIB+\triangle BIC+\triangle CIA=\triangle ABC$

$\dfrac{12r+5t+13r}{2}=30\ \Rightarrow\ r=2$

取 $B(0，0)$，$C(5，0)$，$A(0，12)$，$I(2，2)$

則內切圓方程式 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

令 $x=2+2\cos\theta$

$y=2+2\sin\theta$

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(2+2\cos\theta)^2+(2\sin\theta-10)^2+(2+2\cos\theta)^2+(2+2\sin\theta)^2$$
$$+(2\cos\theta-3)^2+(2+2\sin\theta)^2$$
$$=137+4\cos\theta-24\sin\theta$$

最大值 $=137+\sqrt{4^2+(-24)^2}=137+4\sqrt{37}$

最小值 $=137-4\sqrt{37}$

6. 參考答案：(2)(3)(4)

試題解析：$a=(3^{50}+3^{-50})^3=3^{150}+3\cdot(3^{50})^2\cdot(3^{-50})+3\cdot(3^{50})\cdot(3^{-50})^2+3^{-150}$

$=3^{150}+3^{51}+3^{-49}+3^{-150}$

(1)(2) $\because\ \log 3^{150}=71+0.565=\log 10^{71}+\log 3.\cdots$

$\therefore\ a$ 的整數部分有 72 位數，而最高位數是 3

(3) $\because\ 3^{51}$ 的個位數字是 7，而 3^{150} 的個位數字是 9

$\therefore\ a$ 的整數部分，個位數字是 6

(4)(5) $\because\ \log 3^{-49}=-24+0.6221=\log 10^{-24}+\log 4.\cdots$

$\therefore\ a$ 的小數點後第 24 位開始出現不為 0 的數字

而小數點後第一個不為 0 的數字是 4

7. 參考答案：⑴⑶⑸

試題解析：$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ 通過 $(-3,0)$，$(-2,4)$，$(0,0)$

$\therefore\ f'(-3)=-108a+27b-6c+d=0 \cdots\cdots$ ①

$f'(-2)=-32a+12b-4c+d=0 \cdots\cdots$ ②

$f'(0)=d=0 \cdots\cdots$ ③

由圖形看出 $y=f'(x)$ 在 $x=0$ 及 -2 有水平切線

$\therefore\ f''(x)=12ax^2+6bx+2c$ 滿足 $f''(0)=0$ 及 $f''(-2)=0$

得 $c=0 \cdots\cdots$ ④

及 $-48a-12b=0 \cdots\cdots$ ⑤

由①②③④⑤，解得 $a=\frac{1}{4}$，$b=1$，$c=0$，$d=0$

得 $f'(x)=x^3+3x^2=x^2(x+3)$

$f''(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

x		-3		-2		0	
$f'(x)$	$-$		$+$				$+$
$f''(x)$		$+$			$-$		$+$

如表：⑴ $\because$ 在區間 $(-3,-2)$，$f'(x)$ 恆正　$\therefore\ f(x)$ 是增函數

⑵ $\because$ 在區間 $(-3,-2)$，$f''(x)$ 爲正值，故 $f(x)$ 圖形凹口向上

⑶ $\because\ f'(-3)=0$ 且 $f''(-3)>0$　$\therefore\ f(-3)$ 是 $f(x)$ 的極小值

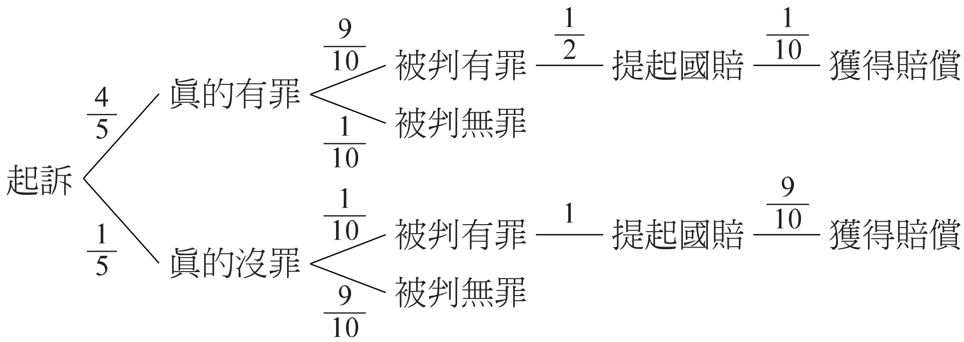
⑷ $(-2, f(-2))$ 是 $f(x)$ 的反曲點且 $f'(-2)>0$　$\therefore\ f(-2)$ 不是極大

⑸ $(0, f(0))$ 是 $f(x)$ 的反曲點

三、選填題

A. 參考答案：$\frac{1}{3}$（⑧ 1　⑨ 3）

試題解析：



$$\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}\times 1\times\frac{9}{10}}{\frac{4}{5}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}\times 1\times\frac{9}{10}}=\frac{1}{3}$$

B. 參考答案：50（⑩ 5　⑪ 0）

試題解析：$\dfrac{(x^2-1)(x^2+x+1)(x-4)^2(x-3)}{(x+2)^2\cdot(x-2)}\leq 0$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-1)(x+2)^2\cdot(x-2)(x-3)(x-4)^2\leq 0$ 且 $x\neq\pm 2$

$\Rightarrow\ (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0$ 或 $x=4$，$x\neq 2$

$\Rightarrow$
$$\begin{array}{ccccccccc} + & & - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 1 & & 2 & & 3 & \end{array}$$

$-1\leq x\leq 1$ 或 $2<x\leq 3$ 或 $x=4$

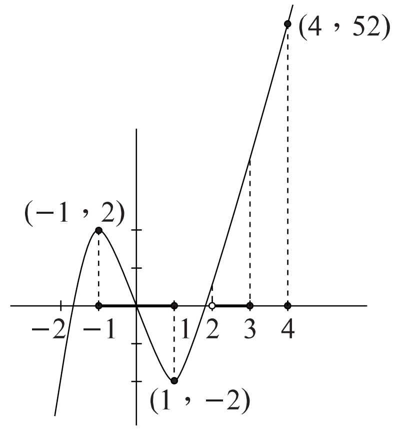
$\because\ f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$f''(x)=6x$

如圖，$M=f(4)=52$，$m=f(1)=-2$

$\therefore\ M+m=50$



C. 參考答案：$\sqrt{5}$（⑫ 5）

試題解析：取 $P(t，t^2)$ 爲 $y=x^2$ 上的動點

$\overline{AP}=\sqrt{(t-3)^2+t^4}=\sqrt{t^4+t^2-6t+9}$

令 $f(t)=t^4+t^2-6t+9$

$f'(t)=4t^3+2t-6=0$

$\Rightarrow\ 2t^3+t-3=0$

$\Rightarrow\ (t-1)(2t^2+2t+3)=0$

$\Rightarrow\ t=1$

$\therefore\ f(1)=5$

$\therefore\ \overline{AP}$ 最小值爲 $\sqrt{5}$

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：⑴ $(a，b)=(6，-2)$　⑵ $\dfrac{1}{4}$

試題解析：⑴ $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ，x\leq 1 \\ \dfrac{ax+b}{x+1} & ，x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 可微分 $\Rightarrow$ 在 $x=1$ 連續

$\because\ f(x)$ 在 $x=1$ 連續　$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=f(1)$

$\Rightarrow\ \dfrac{a+b}{2}=2\ \Rightarrow\ a+b=4$

$\because\ f(x)$ 在 $x=1$ 可微分　$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{ax+b}{x+1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2+1)-2}{x-1}=2$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=2$

將 $b=4-a$ 代入

得 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+4-a-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{a(x-1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{a-2}{x+1}$

$=\dfrac{a-2}{2}=2$

$\therefore$ $a=6$，$b=-2$（4 分）

⑵ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-4}{2h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}\times\dfrac{1}{2}$

$=f'(3)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$（6 分）

（當 $x>1$ 時，$f(x)=\dfrac{6x-2}{x+1}$ $\Rightarrow$ $f'(x)=\dfrac{6(x+1)-(6x-2)\cdot1}{(x+1)^2}$

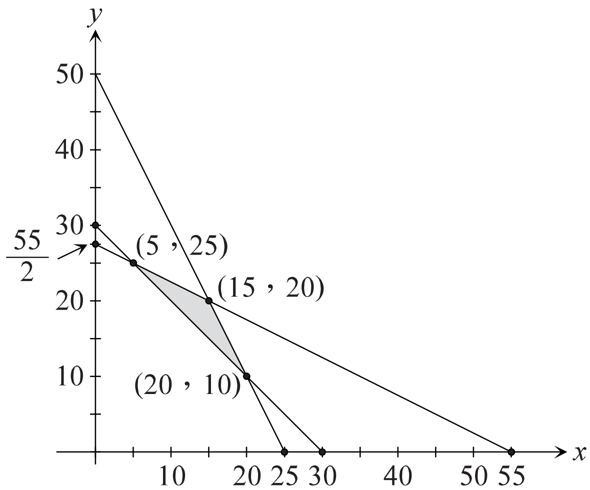
$\Rightarrow$ $f'(3)=\dfrac{6\times4-16}{16}=\dfrac{1}{2}$）

二、參考答案：⑴如圖　⑵食物 15 噸，貨物 20 噸　⑶食物 20 噸，貨物 10 噸

試題解析：⑴設每天接單食物 x 噸，貨物接單 y 噸

則 $\begin{cases}4x+2y\le100\\x+2y\le55\\x+y\ge30\\x\ge0\\y\ge0\end{cases}$

畫出可行解區域如圖



（4 分）

⑵運費 $f(x，y)=10000x+7000y$

在 $f(15，20)$ 有最大值

食物 15 噸，貨物 20 噸（3 分）

⑶利潤 $g(x，y)$

$=(10000x+7000y)-(4x+2y)\times1000-(x+2y)\times1500$

$=4500x+2000y$

在 $f(20，10)$ 有最大值

食物 20 噸，貨物 10 噸（3 分）