

臺中區國立高級中學九十八學年度 大學入學指定科目考試第三次聯合模擬考

數學乙

試題編號：AU-39804
考試日期：99.04.30

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

題型題數：單選題 3 題，多選題 3 題，選填題第 A 至 D 題共 4 題，非選擇題共二大題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上劃記，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

(一) 填答選擇題時，只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ±, 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而正確的答案為 7 亦即選項 (3)時，考生要在答案卡第一列 ³ 劃記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 ¹ 與 ³ 劃記，如：

10	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
----	-------------------------------------	--------------------------	-------------------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

(二) 選填題的題號是 A, B, C, …, 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而答案是 $\frac{3}{8}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 ³ 與第 19 列的 ⁸ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 ⁻ 與第 21 列的 ⁷ 劃記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

祝考試順利

第壹部分：選擇題（佔 73 分）

一、單選題（佔 21 分）

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。
每題答對得 7 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 1.75 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不扣分。

1. 函數 $f(x) = a^x + \log_a(x+1)$ 在 $[0, 1]$ 區間上的最大值與最小值的和為 a ，則 a 的值為何？
 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 2 (4) 3 (5) $\frac{1}{3}$
2. 設 $a > 0, b > 0$ ，若 $\sqrt{3}$ 是 3^a 與 3^b 的等比中項，則 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值為？
 (1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 4 (5) $\frac{1}{4}$
3. 設三次多項函數，其係數分別由 1, 1, 1, -3 四個數排列而成（例如 $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ 便是其中一種），試問：這些函數的圖形與 x 軸共有幾個相異的交點？
 (1) 4 個 (2) 5 個
 (3) 8 個 (4) 9 個
 (5) 12 個

二、多選題（24 分）

說明：第 4 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分，整題未作答者，不給分亦不扣分。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 設方程組
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+by+cz=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z=0 \end{cases}$$
 除了 $(0, 0, 0)$ 外還有其他的解，則數對 (a, b, c) 可為
 (1) $(1, 2, 3)$ (2) $(2, 2, 3)$
 (3) $(-1, -2, 3)$ (4) $(0, -1, 1)$
 (5) $(-1, 2, 3)$

5. 已知 A 為二階方陣，且 $A^3 = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A^5 = \begin{bmatrix} -18 & 9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}$ ， O_2 為二階零方陣， I_2 為二階單位方陣，則

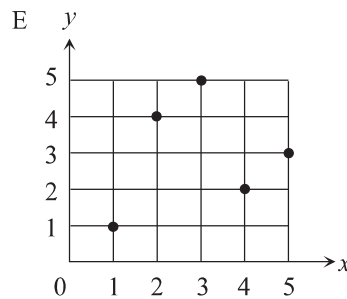
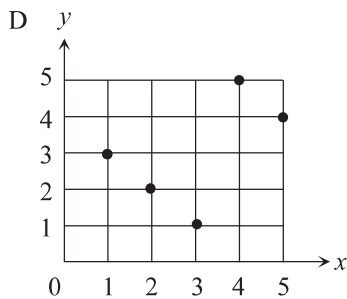
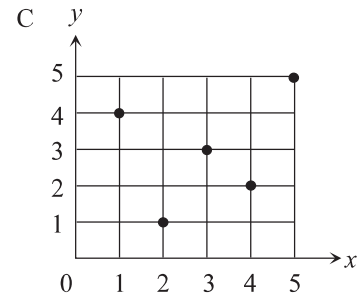
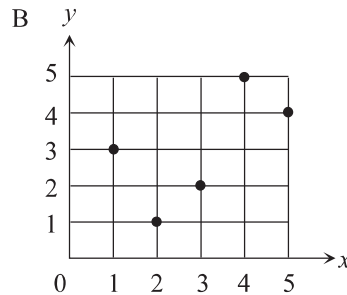
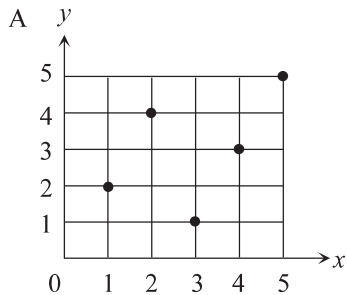
(1) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(3) 矩陣 A 滿足 $A^2 + 3A + 3I_2 = O_2$ (4) $A^3 - 5A^2 + 9A - 5I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(5) 若矩陣 B, C 滿足 $AB = C$ ，則 $B = A^{-1}C$

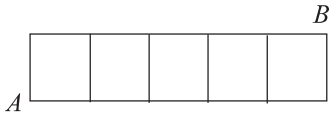
6. 下圖中，有五組數據，每組各有 5 個資料點，巧的是，每組 5 個資料點的 x 坐標皆出現 1~5 的數字各一次， y 坐標也符合此規則，請問以下何者正確？



- (1) A 與 E 的相關係數相同
- (2) B 的相關係數最大
- (3) D 的相關係數為負
- (4) 五組資料的迴歸直線皆通過點 $(3, 3)$
- (5) y 對 x 的迴歸直線斜率最大的是 A

三、選填題 (28 分)

說明：A 至 D 題為選填題，請在答案卡的「解答欄」之列號 (7~16) 中標示答案。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 中秋烤肉時，小丸子想將 3 顆貢丸、2 顆魚丸及 3 顆花枝丸串成兩個烤肉串，每個烤肉串上有 4 顆丸子，竹籤有頭尾之分。請問總共有 ⑦⑧⑨ 種串法。（烤肉串的竹籤有頭尾之分）
- B. 圖右為方格形的街道（每格皆正方形），甲自 A 往 B ，乙自 B 往 A ，兩人皆走最短路徑並同時出發，且甲的速度為乙的兩倍，若每一分叉路口選擇前進方向機會相同，則甲乙兩人在路上相遇的機率為 $\frac{\textcircled{10}}{\textcircled{11}\textcircled{12}}$ 。
- 
- C. 某實驗測量成人睡眠呼吸中止症的準確度為 95%，已知在 500 位接受實驗的人當中，有 465 位測量結果顯示為正常，又知道此實驗對於正常的人有 $\frac{23}{24}$ 的準確度，試問真正正常的人數為 ⑬⑭⑮ 人。
- D. 設 x, y 滿足條件 $\begin{cases} 3x - y \leq 6 \\ x - y \geq -2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ ，若目標函數 $P = ax + by$ ($a > 0, b > 0$) 的最大值為 18，則 $\log_3 a + \log_9 b$ 的最大值為 ⑯。

第貳部分：非選擇題（27 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、⋯），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

- 一、有甲乙兩水壺分別裝有 x, y 公升的水，每次操作都是先將甲壺的水倒出 $\frac{1}{3}$ 到乙壺，再將乙壺的水倒出 $\frac{1}{2}$ 到甲壺，則
- (1) 經過一次操作後，甲壺的水有多少公升（以 x, y 表示）？（4 分）
- (2) 設 n 次操作後，甲壺有 x_n 公升的水，乙壺有 y_n 公升的水，已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足
- $$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ 求 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ (4 分)}$$
- (3) 設 $x = y = 6$ ，若一直操作下去，甲乙兩壺的水趨於穩定，則最後甲乙兩壺各有多少水？（6 分）

二、國內法定傳染病的感染率 $I(t)$ 定義為 $I(t) = \frac{t \text{ 個月後被感染過的人數}}{\text{人口總數}}$

根據理論推得感染率 $I(t)$ 符合 $I(t) = \frac{1}{1+a \cdot 7^{-bt}}$ 的數學模式，其中 a, b 為常數。而當

$I(t) = \frac{1}{2}$ 時，是傳染病的高峰期。今 H1N1 病毒在台蔓延，剛開始（即 $t=0$ 時）有 2 % 的人口被感染，而 3 個月後有 12.5 % 的人口被感染。試求：

- (1) 感染率 $I(t)$ 中的常數 a 與 b 的值。（5 分）
- (2) t 個月後 H1N1 將達到傳染病的高峰期，求 $t = ?$ （4 分）
- (3) 一年後，全台有多少比例的人口被感染過？（4 分）

