臺中區國立高級中學九十八學年度
大學入學指定科目考試第三次聯合模擬考
數學乙詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 參考答案：⑵

試題解析：∵ 函數 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 區間為遞減或遞增

∴ 最大值與最小值均發生在邊界點

∴ 最大值與最小值的和 $a=a^0+\log_a(0+1)+a^1+\log_a(1+1)$

$\Rightarrow a=1+0+a+\log_a 2$

$\Rightarrow \log_a 2=-1 \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$

∴ 選⑵

2. 參考答案：⑷

試題解析：∵ $\sqrt{3}$ 是 3^a 與 3^b 的等比中項

∴ $(\sqrt{3})^2=3^a\cdot 3^b$

$\Rightarrow 3=3^{a+b} \Rightarrow a+b=1$

又 $a>0$，$b>0$，由柯西不等式得

$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2][(\dfrac{1}{\sqrt{a}})^2+(\dfrac{1}{\sqrt{b}})^2]\geq[1+1]^2$

$\Rightarrow [a+b][\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}]\geq 4$

$\Rightarrow 1\cdot[\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}]\geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 4$

∴ 選⑷

3. 參考答案：⑵

試題解析：將 1，1，1，-3 排成一列，共有 $\dfrac{4!}{3!}=4$ 種

⑴若 $f_1(x)=x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)=0$

實根 $x=1$

⑵若 $f_2(x)=x^3+x^2-3x+1=(x-1)(x^2+2x-1)=0$

實根 $x=1$，$-1\pm\sqrt{2}$

⑶若 $f_3(x)=x^3-3x^2+x+1=(x-1)(x^2-2x-1)=0$

實根 $x=1$，$1\pm\sqrt{2}$

⑷若 $f_4(x)=-3x^3+x^2+x+1=-(x-1)(3x^2+2x+1)=0$

實根 $x=1$

故共有 5 個不同的實根　∴ 選⑵

二、多選題

4. 參考答案：⑵⑶⑷

試題解析：除了$(0,0,0)$外，還有其他的解

$$\Rightarrow \text{無限多解} \quad \therefore \triangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(c^2+ac-b^2-ab)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=0$$

$\therefore\ a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$ 或 $a+b+c=0$

故選⑵⑶⑷

5. 參考答案：⑴⑵⑸

試題解析：⑴$\because\ A^3=\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad\therefore\ A^{-3}=(A^3)^{-1}=\dfrac{1}{27}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}$

$$A^2=A^{-3}\cdot A^5=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -18 & 9 \\ -9 & -9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

⑵$\because\ A^{-2}=(A^2)^{-1}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A=A^{-2}\cdot A^3=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

⑶由 Cayley-Hamilton 定理可知 $\Rightarrow\ A^2-3A+3I_2=O_2$

⑷$\because A^3-5A^2+9A-5I=(A-2I)(A^2-3A+3I)+I$

又$A^2-3A+3I_2=O_2$

$\therefore\ A^3-5A^2+9A-5I$

$=O_2+I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & A-2I \\ A^2-3A+3I_2 \,\big) & \overline{A^3-5A^2+9A-5I} \\ & \underline{A^3-3A^2+3A} \\ & -2A^2+6A-5I \\ & \underline{-2A^2+6A-6I} \\ & I \end{array}$$

⑸$\because\ A^{-1}$存在（$\det(A)\neq 0$）

$\therefore\ B=A^{-1}C$

故選⑴⑵⑸

6. 參考答案：⑵⑷

試題解析：因爲每組資料的 x，y 坐標皆爲 1，2，3，4，5

$\therefore\ \overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$

$(\overline{x}，\overline{y})=(3，3)$。⑷正確

每組資料的相關係數 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$

分母皆相同，只需比較分子：

$A：4+0-1+0+2=5$

$B：2+2+0+0+2=6$

$C：4+0-2-1+2=3$

$D：2+2+0+0+1=5$

$E：0+0-1-1+4=2$

$\therefore$ B 的相關係數最大

A、D 相關係數相同

$A\sim E$ 的相關係數皆爲正

⑸ y 對 x 的迴歸直線斜率公式爲 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

5 組資料在分母皆相同，比較分子部分最大者爲 B，斜率最大爲 B

三、選填題

A. 參考答案：280（⑦ 2　⑧ 8　⑨ 0）

試題解析：將 3 顆貢丸、2 顆魚丸、3 顆花枝丸排成一列

共有 $\dfrac{8!}{3!\,2!\,3!}=560$ 種

竹籤：$\longrightarrow$　$\longrightarrow$

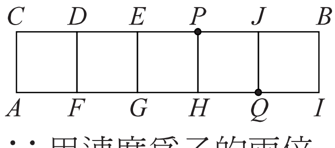
丸子：貢貢貢魚　魚花花花　的排列

與　魚花花花　貢貢貢魚　的排法是相同的

故 $\dfrac{560}{2}=280$ 種

B. 參考答案：$\dfrac{9}{32}$（⑩ 9　⑪ 3　⑫ 2）

試題解析：



$\because$ 甲速度爲乙的兩倍

$\therefore$ 兩人在 P、Q 兩點相遇

甲走到P的機率為

$P(A\to C\to D\to E\to P)+P(A\to F\to D\to E\to P)+P(A\to F\to G\to E\to P)$

$+P(A\to F\to G\to H\to P)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{15}{16}$

甲走到Q的機率為$P(A\to F\to G\to H\to Q)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

乙走到P的機率為$P(B\to J\to P)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

乙走到Q的機率為$P(B\to I\to Q)+P(B\to J\to Q)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

∴ 兩人相遇的機率為$P(P$相遇$)+P(Q$相遇$)=\frac{15}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\times\frac{3}{4}=\frac{18}{64}=\frac{9}{32}$

C. 參考答案：480（⑬ 4　⑭ 8　⑮ 0）

試題解析：設真正正常的人數為x人

真正＼測量	正常	異常	總計
正常	$\frac{23}{24}x$	$\frac{1}{24}x$	x
異常		$35-\frac{1}{24}x$	
總計	465	35	500

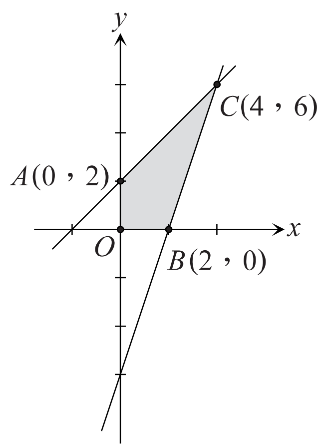
測量準確人數：$\frac{23}{24}x+(35-\frac{1}{24}x)=500\times 95\%=475$

$\Rightarrow\ \frac{22}{24}x=440$

$\Rightarrow\ x=480$

D. 參考答案：1（⑯ 1）

試題解析：滿足不等式條件的區域範圍如圖：



∴ 目標函數$P=ax+by$（$a>0$，$b>0$）

之最大值在$C(4,6)$產生

即$4a+6b=18\ \Rightarrow\ 2a+3b=9$

又$\frac{a+a+3b}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot a\cdot 3b}$

$\Rightarrow\ 3\geq\sqrt[3]{3a^2b}\ \Rightarrow\ 27\geq 3a^2b\ \Rightarrow\ a^2b\leq 9$

∴ $\log_3 a+\log_9 b=\log_9 a^2+\log_9 b=\log_9 a^2b\leq\log_9 9=1$

∴ 最大值為 1

第貳部分：非選擇題

一、參考答案：⑴ $(\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y)$ ⑵ $\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ⑶甲有 9 公升，乙有 3 公升

試題解析：⑴ $\underset{x}{\boxed{甲}} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \underset{y}{\boxed{乙}}$ 變成 $\underset{\frac{2}{3}x}{\boxed{甲}}$ $\underset{y+\frac{1}{3}x}{\boxed{乙}}$

$\underset{\frac{2}{3}x}{\boxed{甲}} \xleftarrow{\frac{1}{2}} \underset{y+\frac{1}{3}x}{\boxed{乙}}$

變成 ⇒ $\boxed{甲}$：$\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y$

$\boxed{乙}$：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}x+y)=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y$

∴ 甲有 $(\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y)$ 公升的水……（4 分）

⑵由⑴可知，一次操作後

甲有 $\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}y$ 公升

乙有 $\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}y$ 公升

∴ $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ∴ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$……（4 分）

⑶設穩定之後甲、乙各有 α、β 公升的水

∴ $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ⇒ $\begin{cases} \alpha=\frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{2}\beta \\ \beta=\frac{1}{6}\alpha+\frac{1}{2}\beta \end{cases}$

∴ $\frac{1}{6}\alpha=\frac{1}{2}\beta$ ⇒ $\alpha:\beta=3:1$

又 $x=y=6$ ∴ $\alpha+\beta=12$

⇒ 甲有 9 公升，乙有 3 公升的水……（6 分）

二、參考答案：⑴ $a=49$，$b=\frac{1}{3}$ ⑵ $t=6$ ⑶ 98 %

試題解析：⑴ $I(0)=\frac{1}{1+a\cdot 7^{-b\cdot 0}}=2\ \%$

⇒ $\frac{1}{1+a}=\frac{2}{100}$ ⇒ $a=49$……（2 分）

又 $I(3)=\dfrac{1}{1+49\cdot 7^{-b\cdot 3}}=12.5\ \%$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{1+7^{2-3b}}=\dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow\ b=\dfrac{1}{3}$……（3 分）

(2) $I(t)=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{1+49\cdot 7^{-\frac{1}{3}t}}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow\ t=6$……（4 分）

(3) $I(12)=\dfrac{1}{1+49\cdot 7^{-\frac{1}{3}\cdot 12}}=98\ \%$……（4 分）