答案與解析 Answer

答案

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1. (D)　2. (E)　3. (D)

二、多重選擇題

4. (C)(D)　5. (B)(C)(D)(E)　6. (A)(B)(D)　7. (A)(B)(C)(E)　8. (B)(C)　9. (A)(B)(C)(E)
10. (A)(B)(C)(E)

第二部分：填充題

11. 24　12. 134　13. 16　14. $2-\sqrt{3}$　15. 229°
16. 41°　17. $\frac{14}{3}$　18. 13　19. $\frac{90}{6^3}$　20. $x+2y+z=13$

解析

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1. 〈方法一〉**找出規則性**

2^n	個位數字
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
2^7	8
2^8	6
2^9	2
⋮	⋮
⋮	⋮

$\because$ 個位數字為每四個一循環

$100 \div 4 = 25 \cdots 0$,

即 2^{100} 的個位數字為 6,

$\therefore$ 2^{100} 除以 10 的餘數為 6.

〈方法二〉**利用二項式定理**

$2^{100} = 1024^{10} = (1020+4)^{10}$

$= C_0^{10}1020^{10} + C_1^{10} \times 1020^9 \times 4^1 + \cdots + C_{10}^{10}4^{10}$,

每一項都有 10 的因數

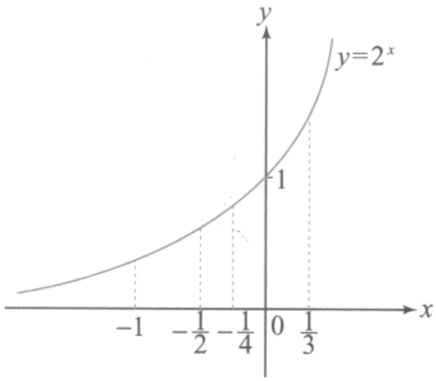
$\therefore$ 2^{100} 除以 10 的餘數與 4^{10} 除以 10 的餘數相同.

又 $4^{10} = 2^{20} = 1024^2 = 1024 \times 1024$,

4^{10} 的個位數字為 6,

$\therefore$ 2^{100} 除以 10 的餘數為 6.

2.



(A) $2^{\frac{1}{3}}$.

(B) $(\frac{1}{8})^{-2}=(2^{-3})^{-2}=2^{6}$.

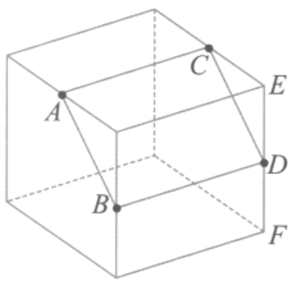
(C) $2^{-\frac{1}{4}}$.

(D) $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=(2^{-1})^{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}$.

(E) $8^{-\frac{1}{3}}=(2^{3})^{-\frac{1}{3}}=2^{-1}$.

$\therefore 2^{-1}$ 最小，即 $8^{-\frac{1}{3}}$ 最小.

3.



平面 ABC 必過 D 點，且 D 為 $\overline{EF}$ 之中點.

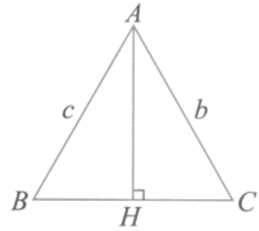
設立方體之邊長為 x,

$\overline{AC}=x$, $\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

故四邊形 $ABCD$ 為非正方形的長方形.

二、多重選擇題

4.



如上圖，$\overline{AH}=b\sin C=c\sin B$.

5. (A) $0.3\overline{43}=\frac{343-3}{990}=\frac{340}{990}=\frac{34}{99}$ 是有理數.

(B) $0.\overline{34}=0.3434\cdots$,

$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$,

$\therefore 0.\overline{34}>\frac{1}{3}$…… 正確.

(C) $0.\overline{34}=0.3434\cdots>0.343$,

$\therefore 0.\overline{34}>0.343$…… 正確.

(D) $0.35>0.3434\cdots\cdots$,

$\therefore 0.\overline{34}<0.35\cdots\cdots$, 正確.

(E) $0.\overline{34}=0.3434343\cdots$,

$0.3\overline{43}=0.3434343\cdots$,

$\therefore 0.\overline{34}=0.3\overline{43}$…… 正確.

6. 利用勘根定理:

x	x^3	$+x^2$	$-2x$	-1	$f(x)$
3	27	+9	−6	−1	+29
2	8	+4	−4	−1	+7
1	1	+1	−2	−1	−1
0	0	+0	−0	−1	−1
−1	−1	+1	+2	−1	+1
−2	−8	+4	+4	−1	−1

$\therefore$在$(2,1)$，$(0,-1)$，$(-1,-2)$之間各有一根.

7. Γ: $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$ 表橢圓,

$F_1(1,2)$, $F_2(-1,-2)$,

$2c=\overline{F_1F_2}=2\sqrt{5},\quad c=\sqrt{5},$

$2a=6,\quad a=3,$

又 $b^2=a^2-c^2=4,\quad b=2,$

中心為 $\overline{F_1F_2}$ 之中點,

$\therefore$ 中心$(0,0)$.

(A)$(0,0)$是 Γ 的中心……, 正確.

(B)$(1,2)$, $(-1,-2)$為 Γ 的焦點……, 正確.

(C)短軸$=2b=4$ ……, 正確.

(D)直線 $y=x$ 不是長軸或短軸所在的直線,

故 Γ 不對稱直線 $y=x$.

〈另解〉Γ 中 y 以 x 代入, x 以 y 代入,

得 $\sqrt{(y-1)^2+(x-2)^2}+\sqrt{(y+1)^2+(x+2)^2}=6$

與 Γ 不同, 故 Γ 不對稱直線 $y=x$.

(E)$(1,2)$與$(-1,-2)$的連線就是長軸所在的直線, 故 Γ 對稱於$(1,2)$與$(-1,-2)$的連線……, 正確.

8. (A) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

(B) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

……正確.

(C) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (-1)

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1-c_1 & b_2-c_2 & b_3-c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

……正確.

(D) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1c_1 & b_2c_2 & b_3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$\neq\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

(E) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$.

9. 原數據 X, 新數據 Y,

其中 $Y=100X-240$,

新數據中

$\overline{Y}=\frac{1}{9}(3+6+1+5+4+8+6+7+5)$

$=5$,

$S_Y=\sqrt{\frac{1}{9}(4+1+16+0+1+9+1+4+0)}$

$=2$.

(A) $\overline{Y}=5$ ……正確.

(B) $S_Y=2$ ……正確.

(C) $\overline{Y}=100\overline{X}-240$,

$\therefore\ \overline{X}=2.45$ ……正確.

(D) $S_Y=S_{100X-240}=100\cdot S_X$,

$\therefore\ S_X=0.02$.

(E)新數據重新排列:

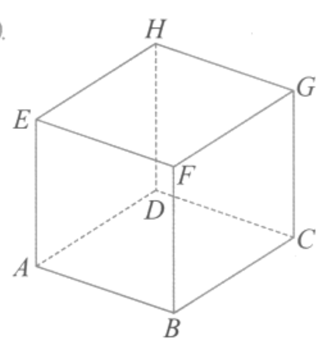
1, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8,

中位數 $M_{e(Y)}=5$,

$M_{e(Y)}=M_{e(100X-240)}=100M_{e(X)}-240$,

$\therefore\ M_{e(X)}=2.45$ ……正確.

10.



(A) $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{EG}$, $\therefore \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EG} = 0$

……正確.

(B) $\overrightarrow{ED} \perp \overrightarrow{EF}$, $\therefore \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

……正確.

(C) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ……正確.

(D)設正立方體的邊長為 a,

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AG}$

$= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG})$

$= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{CG}$

$+ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG}$

$+ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CG}$

$= 0 + 0 + (-a^2) + a^2 + 0 + 0 + 0 +$

$a^2 + 0$

$= a^2 \neq 0$.

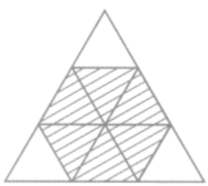
(E) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{EC}$ ……正確.

第二部分：填充題

11. 如下圖正六邊形的面積

$= \dfrac{6}{9}$ (正三角形的面積) $= 24$.



12. $S = 100 \times (1 + 0.03)^{10}$.

設 $x = 1.03^{10}$,

由附表知 $\log 1.03 = 0.0128$,

$\therefore \log x = 10 \times \log 1.03$

$= 10 \times 0.0128 = 0.1280$.

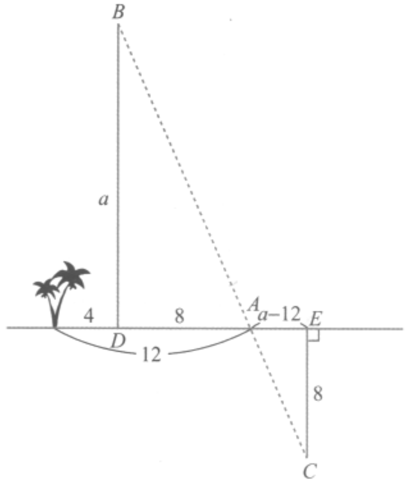
由查表法知 $0.1280 = \log 1.343$,

$\therefore 1.03^{10} = x = 1.343$,

$\therefore S = 100 \times 1.343 = 134.3$

$\fallingdotseq 134$（元）.

13. 如下圖, $\triangle BAD \sim \triangle CAE$,



$\therefore \dfrac{a}{8} = \dfrac{8}{a-12}$

$\Rightarrow \quad a = 16, \ -4$（不合）,

$\therefore a = 16$.

14. $2 + \sqrt{3}$ 為 $x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)x + 1 = 0$

的一根,

$\therefore (2 + \sqrt{3})^2 - (\tan\theta + \cot\theta)(2 + \sqrt{3}) + 1$

$= 0$

$\Rightarrow \quad \tan\theta + \cot\theta = \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 4$

$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 4$,

$(\tan\theta)^2 - 4\tan\theta + 1 = 0$

$\tan\theta = 2 \pm \sqrt{3}$,

$\therefore 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad 0 < \tan\theta < 1$,

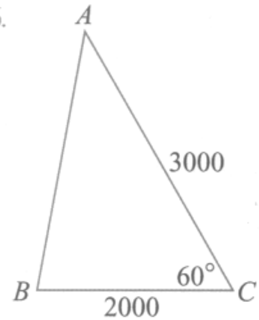
$\therefore \tan\theta = 2 - \sqrt{3}$.

15. $s = r \cdot \theta$, $200 = 50\theta$,

$\theta = \dfrac{200}{50}$（弧度）$= 4 \times \dfrac{180}{3.14}$（度）

$= 229.299$（度）$\fallingdotseq 229°$.

16.



餘弦定理:

$\overline{AB}^2 = 3000^2 + 2000^2$

$\quad - 2 \times 3000 \times 2000 \times \cos 60°$

$\quad = 1000^2(9 + 4 - 6) = 7 \times 1000^2,$

$\overline{AB} = 1000\sqrt{7}.$

正弦定理: $\dfrac{2000}{\sin A} = \dfrac{1000\sqrt{7}}{\sin 60°},$

$\sin A = \dfrac{\sqrt{21}}{7} = 0.6547.$

由查表知: $\sin 41.0° = 0.6561,$

$\sin 40.5° = 0.6494,$

$0.6494 < 0.6547 < 0.6561,$

$\therefore\ 40.5° < \angle A < 41.0°,$

四捨五入後, $\angle A \doteqdot 41°.$

17. E（任取二球）

$= 2 \times E$（任取一球）

$= 2 \times (\dfrac{2}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 5) = \dfrac{14}{3}.$

〈另解〉

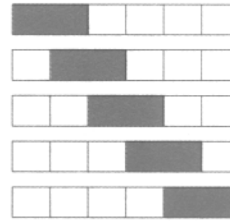
$2 \times \dfrac{C_2^2}{C_2^3} + 6 \times \dfrac{C_1^2 C_1^1}{C_2^3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{12}{3} = \dfrac{14}{3}.$

18. 咖啡色磚 0 個

$\Rightarrow$ 1 種.

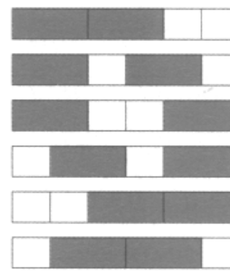
咖啡色磚 1 個

$\Rightarrow$ 5 種.



咖啡色磚 2 個

$\Rightarrow$ 6 種.



咖啡色磚 3 個

$\Rightarrow$ 1 種.

∴共有 13 種不同的圖案.

19. $P = \dfrac{C_2^3 \times 6 \times 1 \times 5}{6^3} = \dfrac{90}{6^3}.$

20. $\overline{PQ}$ 之中點$(3, 3, 4)$, $\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 2),$

∴垂直平分面方程式為

$2(x - 3) + 4(y - 3) + 2(z - 4) = 0$

$\Rightarrow\ x + 2y + z = 13.$