答案與解析 Answer

答案

一、單一選擇題

1. (4)　2. (5)　3. (2)　4. (3)　5. (4)

二、多重選擇題

6. (4)(5)　7. (1)(2)(3)(4)　8. (1)(2)(5)　9. (3)(4)　10. (2)(4)(5)　11. (2)(3)(5)

三、選填題

⑫ 1　⑬ 1　⑭ 1　⑮ 1　⑯ 2　⑰ 5　⑱ 2　⑲ 2　⑳ 2　㉑ 3　㉒ 1　㉓ 2　㉔ 5　㉕ 4
㉖ 1　㉗ 1　㉘ 6　㉙ 8　㉚ 6　㉛ 0　㉜ 8　㉝ 6　㉞ 3

解析

一、單一選擇題

1. $\because \dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{10}{n}$

$=\dfrac{1}{n}(1+2+\cdots+10)$

$=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{10\times 11}{2}=\dfrac{55}{n}$,

欲使其為整數，則 $n\mid 55$,

$\therefore n=1$ 或 5 或 11 或 55，共有 4 個.

2. 由餘式定理得知 $g(x)=f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得餘式為

$g(2)=f(f(2))=f(3)$

（$\because f(2)=8-8-2+5=3$）

$=27-2\times 9-3+5=11$.

3. $\because (4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=(4\cos\theta-3\sin\theta)+(4\sin\theta+3\cos\theta)i$,

其為小於 0 的實數,

$\therefore 4\cos\theta-3\sin\theta<0$

且 $4\sin\theta+3\cos\theta=0$,

$\therefore \tan\theta=-\dfrac{3}{4}$，則 θ 為第二或第四象限的角.

θ 為第二象限的角時，$\cos\theta<0$，$\sin\theta>0$,

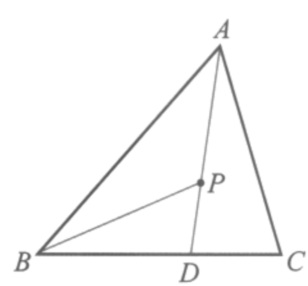
$\therefore 4\cos\theta-3\sin\theta<0$.

θ 為第四象限的角時，$\cos\theta>0$，$\sin\theta<0$,

$\therefore 4\cos\theta-3\sin\theta>0$.

故 θ 為第二象限的角.

4.



設直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D，且 $\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AP}$

$=\frac{1}{5}r\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}r\overrightarrow{AC}$，

$\because D, B, C$ 三點共線，

$\therefore \frac{1}{5}r+\frac{2}{5}r=1 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{5}{3}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

則 $\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$ 且 $\overline{AP}=\frac{3}{5}\overline{AD}$，

$\therefore \frac{\triangle ABP\text{ 的面積}}{\triangle ABD\text{ 的面積}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=\frac{3}{5}$

且 $\frac{\triangle ABD\text{ 的面積}}{\triangle ABC\text{ 的面積}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{2}{3}$，

則 $\frac{\triangle ABP\text{ 的面積}}{\triangle ABC\text{ 的面積}}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$.

5. 由題意得知，3 小時內有 $100(1-2^{-3k})\%=70\%$ 的人口聽到訊息，

$\therefore 1-2^{-3k}=\frac{7}{10} \quad \Rightarrow \quad 2^{-3k}=\frac{3}{10}$，

而 T 小時後有 $100(1-2^{-kT})\%=99\%$ 的人口聽到該訊息，

$\therefore 1-2^{-kT}=\frac{99}{100} \quad \Rightarrow \quad 2^{-kT}=\frac{1}{100}$，

$\therefore (2^{-3k})^{\frac{T}{3}}=(\frac{3}{10})^{\frac{T}{3}}=\frac{1}{100}=10^{-2}$，

則 $\log(\frac{3}{10})^{\frac{T}{3}}=-2$

$\Rightarrow \quad \frac{T}{3}(\log 3-1)=-2$

$\Rightarrow \quad T \doteqdot \frac{-6}{0.4771-1} \doteqdot 11.5$.

二、多重選擇題

6. L_1 之斜率為 $-\frac{1}{a}>0$，

x 截距為 $-b>0$，

$\therefore a<0$，$b<0$.

又 L_2 之斜率為 $-\frac{1}{c}>0$，

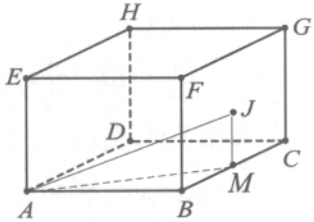
x 截距為 $-d<0$，

$\therefore c<0$，$d>0$.

又 $\because L_1$ 之斜率 $>L_2$ 之斜率，

$\therefore -\frac{1}{a}>-\frac{1}{c}>0$，

$\therefore -a<-c \quad \Rightarrow \quad a>c$.

7. 

取 $\overline{BC}$ 的中點 M，

$\because J$ 為四邊形 $BCGF$ 的中心，

$\therefore \overline{MJ} \,//\, \overline{BF} \,//\, \overline{AE}$，

且 $\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，

$\therefore \overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MJ}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})+\overrightarrow{MJ}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$，

則 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$.

8. (1) $\because \sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$ 且 $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$，

底數 $2>1$，

$\therefore 2^{\frac{1}{2}}>2^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2}>\sqrt[3]{2}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2}-\sqrt[3]{2}>0$.

(2) $\because \log_2 3>\log_2 2$，

（$\because 3>2$ 且底數 $2>1$）

$\therefore \log_2 3>1 \quad \Rightarrow \quad \log_2 3-1>0$.

(3) $\because \log_3 2<\log_3 3=1$，

$\therefore \log_3 2-1<0$.

(4) $\log_{\frac{1}{2}}3=\log_{2^{-1}}3=-\log_2 3<0$.

(5) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_{3^{-1}}2^{-1}=\frac{-1}{-1}\log_3 2$

$=\log_3 2>\log_3 1=0$.

9. (1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，

$\therefore$ 其最小正週期為 2π.

(2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$，

$\therefore$ 其最小正週期為 2π.

(3) $|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\,|\sin(x+\frac{\pi}{4})|$,

$\therefore$ 其最小正週期為 π.

(4) $|\sin x-\cos x|=\sqrt{2}\,|\sin(x-\frac{\pi}{4})|$,

$\therefore$ 其最小正週期為 π.

(5) $|\sin(x+\frac{\pi}{2})|+|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$

$=|\cos x|+|-\sin x|$

$=|\sin x|+|\cos x|$,

$\therefore$ 其最小正週期為 $\frac{\pi}{2}$.

10. 因命題：若 p 則 q 與若 $\sim q$ 則 $\sim p$ 同義,

$\therefore$ 若 $x>0$，則 $y>0$ 與若 $y\le 0$，則 $x\le 0$ 同義，$\therefore$ (2)為真.

又若命題：若 p 則 q 為真時，p 為真則 q 必為真.

$\because$ $x>1$ 時，$x>0$ 為真,

$\therefore$ $y>0$ 必為真,

即若 $x>1$，則 $y>0$ 必成立,

$\therefore$ (4)為真.

又若 $y<0$ 時，$y\le 0$ 必成立,

$\therefore$ $x\le 0$ 必成立（由(2)得知),

即若 $y<0$，則 $x\le 0$ 必成立,

$\therefore$ (5)為真.

11. (1) $\because$ π_a 的一法向量 $(1,-4,a)$ 恆不平行 E_1 之一法向量 $(1,-2,1)$,

$(\because \frac{1}{1}\ne\frac{-4}{-2})$

$\therefore$ 不存在實數 a 使 π_a 與 E_1 平行.

(2) 令 $(1,-4,a)\cdot(1,-2,1)=$

$1+8+a=0$ 時,

$a=-9$ 存在實數 a 使 π_a 與 E_1 垂直.

(3)(4)(5) 由 $\begin{cases}x-4y+az=10 & \cdots ①\\ x-2y+z=5 & \cdots\cdots ②\\ 2x-5y+4z=-3 & \cdots ③\end{cases}$

$\begin{cases}① - ② 得 -2y+(a-1)z=5\\ ② \times 2 - ③ 得 y-2z=13\end{cases}$.

當 $\frac{-2}{1}\ne\frac{a-1}{-2}$ 即 $a\ne 5$ 時，方程組恰有一組解,

$\therefore$ 此三平面恰交一點.

當 $\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{-2}\ne\frac{5}{13}$

即 $a=5$ 時，方程組無解,

$\therefore$ 此三平面沒有共同之交點.

$\because$ $\frac{-2}{1}=\frac{a-1}{-2}=\frac{5}{13}$ 恆不成立,

$\therefore$ 不存在實數 a 使此三平面交於一直線.

三、填充題

A. 設數列中有 x 項為 -1，y 項為 0，z 項為 1,

則 $\begin{cases}x+y+z=50\\ a_1+a_2+\cdots+a_{50}\\ \quad =x(-1)+y(0)+z(1)\\ \quad =9\\ (a_1+1)^2+(a_2+1)^2\\ \quad +\cdots+(a_{50}+1)^2\\ \quad =x(-1+1)^2+y(0+1)^2+z(1+1)^2\\ \quad =107\end{cases}$,

$\therefore \begin{cases}x+y+z=50\\ -x+z=9\\ y+4z=107\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=15\\ y=11\\ z=24\end{cases}$,

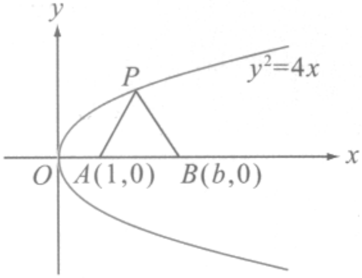
$\therefore$ 有 11 項為 0.

B. $\because$ 樣本空間的元素為3，3，8，9之排列數為 $\frac{4!}{2!}=12$,

而只試一次就成功之情形只有 1 種,

$\therefore$ 所求之機率為 $\frac{1}{12}$.

C.



$\because$ 由圖得知，點 P 必在第一或第四象限，

又此正 $\triangle PAB$ 之邊長為 $b-1$，

$\therefore P$ 的坐標為 $(\dfrac{b+1}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(b-1))$.

$\because P$ 在 Γ： $y^2=4x$ 上，

$\therefore \dfrac{3}{4}(b^2-2b+1)=4(\dfrac{b+1}{2})$

$\Rightarrow \quad 3b^2-14b-5=0$

$\Rightarrow \quad (3b+1)(b-5)=0$，

$\because b>1$， $\therefore b=5$

D. 由雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 得知 $a=3$，

$b=4$， $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$，

$\because \overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$， 令 $\overline{PF_1}=k$，

$\overline{PF_2}=3k$， $k>0$，

由雙曲線的定義得知

$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$，

$\therefore 2k=6 \quad \Rightarrow \quad k=3$，

$\therefore \overline{PF_1}=3$， $\overline{PF_2}=9$，

又 $\overline{F_1F_2}=2c=10$，

$\therefore \triangle F_1PF_2$ 之周長為 $3+9+10=22$.

E. $\because$ 過球心之平面與球面相交所得的圓為一大圓，其圓心為球心，半徑為球面的半徑，

令 $\angle NOP=\theta$，

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{ON}|\times|\overrightarrow{OP}|}$

$=\dfrac{(0,0,1)\cdot(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{11}}{4},-\frac{1}{2})}{1\times1}$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1}=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \theta=\dfrac{2\pi}{3}$， 則劣弧 $\overset{\frown}{NP}$ 的弧長

$=1\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.

F. $\because$ 有兩相異實根，

$\therefore$ 判別式 $=7^2-4k>0$

$\Rightarrow \quad k<\dfrac{49}{4}\cdots$①，

又兩根的乘積為 $\dfrac{1}{k}$，

$\therefore \dfrac{5}{71}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{6}{71}$

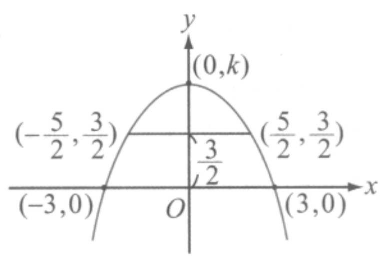
$\Rightarrow \quad \dfrac{71}{6}<k<\dfrac{71}{5}\cdots$②，

由①、②得知 $\dfrac{71}{6}<k<\dfrac{49}{4}$，

$\because k$ 為整數，

$\therefore k=12$.

G.



作一坐標系如圖，令拋物線的頂點為 $(0,k)$， 方程式為 $x^2=4c(y-k)$，$k>0$，

且拱門底部之兩端點各為$(-3,0)$，$(3,0)$，

又距底部 $\dfrac{3}{2}$ 公尺高度之水平線段之兩端點各為 $(\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$， $(-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2})$，

$\therefore \begin{cases} 9=4c(0-k)\cdots\cdots\cdots ① \\ (\frac{5}{2})^2=4c(\frac{3}{2}-k)\cdots ② \end{cases}$

由 $\dfrac{①}{②}$ 得 $\dfrac{36}{25}=\dfrac{-k}{\dfrac{3}{2}-k}$

$\Rightarrow \quad k=\dfrac{54}{11}$,

故拱門的高度為 $\dfrac{54}{11}$ 公尺.

H. ∵有 6 題須從剩下的 3 選項猜選 1 項,

∴猜對 1 題之機率為 $\dfrac{1}{3}$,

∴此 6 題平均可對 $6\times\dfrac{1}{3}=2$ 題,

錯 4 題,

又有 3 題須從 5 個選項猜選 1 項,

∴猜對 1 題之機率為 $\dfrac{1}{5}$,

∴此 3 題平均可對 $3\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{5}$ 題,

錯 $\dfrac{12}{5}$ 題,

則總得分之期望值為

$16\times4+[2\times4+4\times(-1)]+$

$[\dfrac{3}{5}\times4+\dfrac{12}{5}\times(-1)]$

$=64+4+0=68$（分）.

I. $\because y=\dfrac{9}{5}x+32$,

∴1 月份平均氣溫是華氏

$\dfrac{9}{5}\times16+32=28.8+32$

$=60.8$（度）,

則標準差是華氏 $\dfrac{9}{5}\times3.5=6.3$（度）.