貳．90 學年度大學聯合招生考試詳解

第一部分：選擇題

一、單一選擇題

1.(D)

【說明】

點數和	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
樣本點數	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)
		(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	
			(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)		
				(4,3)	(5,3)	(6,3)	(6,4)	(6,5)			
					(4,4)	(4,5)	(5,5)				
						(5,4)					

$\therefore$ 點數和爲 9 點時其機率爲最大，即 $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$

2.(D)

【說明】$\because$ 所求球面與正立方體所有邊的相交狀況僅有下列 4 種情形：

①正立方體均在球面之內部，此時無交點。

②正立方體內接於球面時，兩者共有 8 個交點，即正立方體的 8 個頂點。

③正立方體之邊與球面均相切時，共有 12 個交點（$\because$ 每邊各有一切點）。

④正立方體之頂點均在球面之外部時，每個邊均與球面交於相異 2 點，故共有 $2\times 12=24$ 個交點。

3.(B)

【說明】令$(1+0.0087)^n=1+0.5$，$n\in N$

則 $log1.0087^n=log1.5$

$\therefore\ nlog1.0087=log1.5$

$\therefore\ n=\dfrac{log1.5}{log1.0087}=\dfrac{0.1761}{0.003762}\doteqdot 47$

故最接近2050年

4.(E)

【說明】(A) $sinx$ 於 $x=0$ 附近之三次近似為 $x-\dfrac{x^3}{3!}$

(B) $cosx$ 於 $x=0$ 附近之三次近似為 $1-\dfrac{x^2}{2!}$

(C)令 $f(x)=sinx+cosx$，則 $f'(x)=cosx-sinx$，

$f''(x)=-sinx-cosx$，$f'''(x)=-cosx+sinx$

$\therefore\ f(0)=1$，$f'(0)=1$，$f''(0)=-1$，$f'''(0)=-1$

$\therefore\ f(x)$ 於 $x=0$ 附近之三次近似為 $1+x-\dfrac{1}{2!}x^2-\dfrac{1}{3!}x^3$

(D)令 $g(x)=sinx-cosx$，則 $g'(x)=cosx+sinx$，

$g''(x)=-sinx+cosx$，$g'''(x)=-cosx-sinx$，

$\therefore\ g(0)=-1$，$g'(0)=1$，$g''(0)=1$，$g'''(0)=-1$

$\therefore\ g(x)$ 於 $x=0$ 附近之三次近似為 $-1+x+\dfrac{1}{2!}x^2-\dfrac{1}{3!}x^3$

(E)令 $h(x)=sinx\,cosx$，則 $h'(x)=cos^2x-sin^2x=cos2x$，

$h''(x)=-sin2x\cdot 2=-2sin2x$，$h'''(x)=-2cos2x\cdot 2=-4cos2x$

$\therefore\ h(0)=0$，$h'(0)=1$，$h''(0)=0$，$h'''(0)=-4$

$\therefore\ h(x)$ 於 $x=0$ 附近之三次近似為 $x-\dfrac{4}{3!}x^3=x-\dfrac{2}{3}x^3$

二、多重選擇題

5.(A)(B)(C)(D)(E)

【說明】本題所給的條件不夠（應將 $a\neq b$ 改為 $|a|\neq|b|$），聯招會所提供之答案為(A)(B)(C)(D)(E)；(A)(B)(D)(E)；(B)(C)(D)(E)；(B)(D)(E)均給 8 分。

$\because$ 已知兩點 $(0,0)$、(a,b)

$\therefore$ 只要有兩邊相等，即為等腰三角形

(A)$\because \left\{ \begin{array}{l} (0,0)\text{、}(a,b)\text{兩點之距離為}\sqrt{a^2+b^2} \\ (0,0)\text{、}(b,a)\text{兩點之距離為}\sqrt{a^2+b^2} \end{array} \right\}$　$\therefore$ 兩者相等

但由（0，0）、（a，b）兩點所決定之直線斜率＝$\dfrac{b}{a}$，與由（0，0）、（b，a）兩點所決定之直線斜率＝$\dfrac{a}{b}$，兩者於 $a=-b$ 時相等，即（0，0）、（a，b）、（b，a）三點共線，而不能決定一等腰三角形

(B)$\because$（0，0）、（$-b$，a）兩點之距離＝$\sqrt{b^2+a^2}$ 與（0，0）、（a，b）兩點之距離相等且前者之斜率＝$\dfrac{a}{-b}$ $\neq$ 後者之斜率＝$\dfrac{b}{a}$　$\therefore$ 合所求

(C)$\because$（a，b）、（$a-b$，$b-a$）兩點之距離＝$\sqrt{b^2+a^2}$ 與（0，0）、（a，b）兩點之距離相等且前者之斜率＝$\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$ 與後者之斜率＝$\dfrac{b}{a}$ 於 $a=-b$ 時相等，即此時（0，0）、（a，b）、（$a-b$，$b-a$）三點共線，而不能決定一等腰三角形

(D)$\because$（a，b）、（0，$2b$）兩點之距離＝$\sqrt{a^2+b^2}$ 與（0，0）、（a，b）兩點之距離相等且前者之斜率＝$\dfrac{b}{-a}$ 與後者之斜率＝$\dfrac{b}{a}$ 不相等　$\therefore$ 合所求

(E)$\because$（a，b）、（$2a$，0）兩點之距離＝$\sqrt{a^2+b^2}$ 與（0，0）、（a，b）兩點之距離相等且前者之斜率＝$\dfrac{-b}{a}$ 與後者之斜率＝$\dfrac{b}{a}$ 不相等　$\therefore$ 合所求

6.(A)(B)(D)(E)

【說明】$\because Y=R+\dfrac{1}{5}(100-R-W)=\dfrac{4}{5}R-\dfrac{1}{5}W+20$

$=\dfrac{4}{5}(R-\dfrac{W}{4})+20=\dfrac{4}{5}X+20$

(A) $X-Y=X-(\dfrac{4}{5}X+20)=\dfrac{X}{5}-20=\dfrac{1}{5}(X-100)\le 0$

（$\because R=100$ 時，$X=100-\dfrac{1}{4}\times 0=100$　$\therefore X\le 100$）　$\therefore X\le Y$

(B)$\because \overline{Y}=\dfrac{4}{5}\overline{X}+20$　$\therefore \overline{X}-\overline{Y}=\dfrac{1}{5}\overline{X}-20=\dfrac{1}{5}(\overline{X}-100)\le 0$　$\therefore \overline{X}\le\overline{Y}$

(C)例如

	N	R	W	
甲	0	100	0	$\Rightarrow X_{甲}=100-\dfrac{0}{4}=100$，$Y_{甲}=100+\dfrac{0}{5}=100$
乙	0	0	100	$\Rightarrow X_{乙}=0-\dfrac{100}{4}=-25$，$Y_{乙}=0+\dfrac{0}{5}=0$

$\therefore |X_{甲}-X_{乙}|=125$，$|Y_{甲}-Y_{乙}|=100$　$\therefore |X_{甲}-X_{乙}|>|Y_{甲}-Y_{乙}|$

(D)∵ $Y=\frac{4}{5}X+20$　∴ X 增大時，Y 隨著增大

∴ 用 X 分數排名次的結果與用 Y 分數排名次完全相同

(E)∵ $Y=\frac{4}{5}X+20$　∴ 散佈圖上之點均在直線 $Y=\frac{4}{5}X+20$ 上，其表示 X 與 Y 爲完全正相關，∴ X 與 Y 的相關係數爲 1。

第二部分：非選擇題

一、填充題

1. 12

【說明】∵ $x^4+ax^3+bx^2+cx+40=0$ 之正整數根僅可能爲 1、2、4、5、8、10、20、40，且此方程式有四個相異之正整數根，且此四根之乘積爲 40

∴ 此方程式之四根爲 1、2、4、5

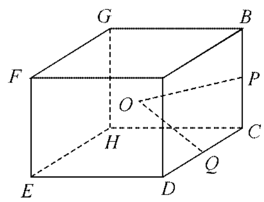
∴ 四根之和爲 $1+2+4+5=12$

2. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

【說明】∵ $E_1 // E_2$

∴ E_1、E_2 之間的距離 $=\frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. $\frac{1}{2}$



【說明】設此正立方體之邊長爲 a，且令 $H=(0,0,0)$，$E=(a,0,0)$，$C=(0,a,0)$，$G=(0,0,a)$

則 $B=(0,a,a)$，$D=(a,a,0)$，$O=(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$

∴ $P=(0,a,\frac{a}{2})$，$Q=(\frac{a}{2},a,0)$

$$\therefore \cos(\angle POQ)=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=\frac{(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0)\cdot(0,\frac{a}{2},-\frac{a}{2})}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+0}\cdot\sqrt{0+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}$$

$$=\frac{0+\frac{a^2}{4}+0}{\frac{a^2}{2}}=\frac{1}{2}$$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

【說明】設 $M=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$，則 $M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore a=3$，$b=2$，$c=1$

$M\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & e \\ 0 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$　$\therefore d=1$，$e=2$，$f=3$

$\therefore M=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$，故 $M\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

【說明】設丙地的座標為 $C(a,b,c)$ 且通過三點 $O(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 之平面為 E，則 E 有一法向量為

$(1,0,0)\times\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore E$ 的方程式為 $-\frac{\sqrt{2}}{2}y+\frac{1}{2}z=0$ 即 $\sqrt{2}y-z=0$

$\because$ 點 (a,b,c) 在平面 E 上　$\therefore \sqrt{2}b-c=0$

$\because \overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1=\overline{OA}=\overline{OB}$

$\therefore \Delta OAB$ 為一正三角形　$\therefore \angle AOB=60^\circ$　$\therefore \angle AOC=30^\circ$

$\therefore \overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times cos30^\circ=(a-1)^2+b^2+c^2$

$\therefore 1+1-2\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=a^2+b^2+c^2-2a+1=1-2a+1$ $(\because a^2+b^2+c^2=1)$

$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\because \overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$　$\therefore \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

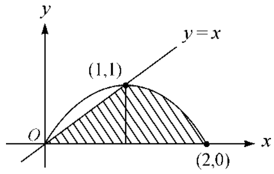
$\therefore (a,b,c)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$　$\therefore -\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{2}}{2}c=0$

$\therefore -a+b+\sqrt{2}c=0$　$\therefore \begin{cases} b+\sqrt{2}c=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2}b-c=0 \end{cases}$　$\therefore b+\sqrt{2}(\sqrt{2}b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{6}$，$c=\sqrt{2}b=\frac{\sqrt{6}}{6}$　故丙地的座標為 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

二、計算題

1. $\frac{7}{6}$



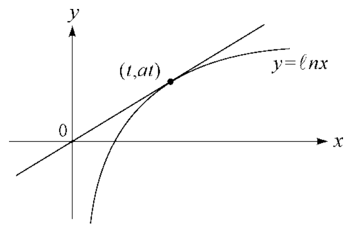
【說明】∵ 曲線 $y = x(2-x) = -x^2+2x$

與直線 $y = x$ 之交點為 $(1, 1)$

∴ 所求斜線區域之面積 $= \frac{1}{2}\times 1\times 1+\int_1^2(-x^2+2x)\,dx$

$= \frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

2. $\frac{1}{e}$



【說明】直線 $y = ax$ 與曲線 $y = lnx$ 相交時，

由 $ax = lnx$ 得 $a = \frac{lnx}{x}$，令 $a = f(x) = \frac{lnx}{x}$，

則 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - lnx\cdot 1}{x^2} = \frac{1-lnx}{x^2}$

當 $f'(x) = 0$ 時，$1-lnx = 0$

∴ $x = e$，由

x	0		e	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗		↘

知當 $x = e$ 時，$a = f(x)$ 有最大值為 $\frac{lne}{e}=\frac{1}{e}$