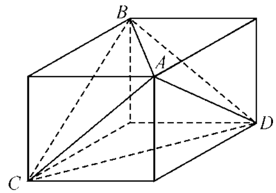
# 貳．91 學年度指定科目考試（數學甲）詳解

## 第壹部分：

### 一、單一選擇題

*1.*(B)

【說明】如右圖，合所求之四個頂點 $A$、$B$、$C$、$D$，任兩頂點所決定的線段均為正立方體各面之對角線其長均為 1，




設正立方體的邊長為 $x$，則$1=\sqrt{2}x \quad \therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

故此正立方體的體積 $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

*2.*(C)

【說明】∵全體受測同學的平均分數即受測同學答對得分之期望值

∴所求的平均分數

$=20$ 分 $\times 80\% + 20$ 分 $\times 70\% + 20$ 分 $\times 60\% + 20$ 分 $\times 50\% + 20$ 分 $\times 40\%$

$=20$ 分 $\times 300\% = 20$ 分 $\times 3 = 60$ 分

### 二、多重選擇題

*3.*(A)(B)

【說明】(A) $f(-x)=\cos(-x)+\dfrac{4}{\cos(-x)}=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}=f(x)$

(B)$\because -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2} \quad \therefore 0<\cos x\leq 1$，利用算幾不等式得

$\cos x+\dfrac{4}{\cos x}\geq 2\sqrt{\cos x\cdot\dfrac{4}{\cos x}}=4$，而等號「＝」成立於 $\cos x=\dfrac{4}{\cos x}$ 時，

即 $\cos^2 x=4>1$，此與 $0\leq\cos^2 x\leq 1$ 相矛盾

$\therefore$ 由 $f(x)=\cos x+4\sec x$ 知 $\sec x=1$（即 $\cos x=1$）時，

$f(x)$ 有最小值 $=1+4=5$，故 $f(x)\geq 5 \quad \therefore f(x)\geq 4$ 亦成立

(C)由(B)知 $f(x)$ 的最小值為 5

(D)$\because$ $|x|$ 愈接近 $\dfrac{\pi}{2}$ 時，$f(x)$ 的值愈增大，且逐漸逼近無限大

$\therefore$ $f(x)$ 沒有最大值

4.(B)(C)(D)

【說明】設一橢圓 $\Gamma_1$ 之方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a>b>0$，則另一橢圓 $\Gamma_2$ 必為將 $\Gamma_1$ 以原點 $O$ 為中心旋轉一角

設為 $\theta$ 所得，由旋轉公式 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

得 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'cos\theta+y'sin\theta \\ -x'sin\theta+y'cos\theta \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\Gamma_2$ 之方程式為 $b^2(x'cos\theta+y'sin\theta)^2+a^2(-x'sin\theta+y'cos\theta)^2=a^2b^2$

則 $(b^2cos^2\theta+a^2sin^2\theta)x'^2+2(b^2-a^2)x'y'sin\theta cos\theta+(b^2sin^2\theta+a^2cos^2\theta)y'^2$

$=a^2b^2$

設 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 之交點座標為 $(x_0, y_0)$，則：

$$\begin{cases} b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2 \cdots ① \\ (b^2cos^2\theta+a^2sin^2\theta)x_0^2+2(b^2-a^2)x_0y_0sin\theta cos\theta+(b^2sin^2\theta+a^2cos^2\theta)y_0^2=a^2b^2 \cdots ② \end{cases}$$

由①−②得 $(b^2-a^2)x_0^2sin^2\theta-2(b^2-a^2)x_0y_0sin\theta cos\theta+(a^2-b^2)y_0^2sin^2\theta=0$

$\therefore$ $x_0^2sin\theta-2x_0y_0cos\theta-y_0^2sin\theta=0$

$\therefore$ $y_0=\dfrac{-cos\theta\pm\sqrt{cos^2\theta+sin^2\theta}}{sin\theta}x_0=\dfrac{-cos\theta\pm1}{sin\theta}x_0$

$\therefore$ $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 之四交點即 $\begin{cases} y=\dfrac{-cos\theta\pm1}{sin\theta}x \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases}$ 之交點

$\because$ $\dfrac{-cos\theta+1}{sin\theta}\cdot\dfrac{-cos\theta-1}{sin\theta}=\dfrac{cos^2\theta-1}{sin^2\theta}=\dfrac{-sin^2\theta}{sin^2\theta}=-1$

$\therefore$ $y=\dfrac{-cos\theta+1}{sin\theta}x$ 表過原點（即 $\Gamma_1$ 的中心）且互相垂直之直線

$\therefore$ 四交點所成四邊形之對角線互相垂直且平分（$\because$ 橢圓 $\Gamma_1$ 對稱於原點（中心）），故該四邊形為一菱形

5.(A)(C)

【說明】∵ 所謂轉移矩陣即馬可夫矩陣

∴ 任兩轉移矩陣之乘積仍爲轉移矩陣

∴ (A)正確而(B)不正確

設 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$、$B=[b_{ij}]_{n\times n}$，且 $\forall i$、$j\in\{1、2、\cdots、n\}$均使

$a_{ij}$ 與 $b_{ij}\geq 0$，又 $\forall j\in\{1、2、\cdots、n\}$均使 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=1$，$\sum_{i=1}^{n}b_{ij}=1$

$\therefore \frac{1}{2}(A+B)=[\frac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})]_{n\times n}$，令 $[c_{ij}]_{n\times n}$，$c_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})$

則 $\forall i$、$j\in\{1、2、\cdots、n\}$ 均使 $c_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})\geq 0$

且 $\forall j\in\{1、2、\cdots、n\}$ 均使 $\sum_{i=1}^{n}c_{ij}=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}+\sum_{i=1}^{n}b_{ij})=\frac{1}{2}(1+1)=1$

故 $\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣　　∴ (C)正確

如 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ 均爲轉移矩陣

但 $\frac{1}{4}(A^2+B^2)=\frac{1}{4}(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix})=\frac{1}{4}(\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，其不

是轉移矩陣　　∴ (D)不正確

6.(A)(B)

【說明】$P$（（該役男確實染病）|（檢驗時被告知患有某傳染病））

$=\frac{0.2\%\times 100\%}{0.2\%\times 100\%+(1-0.2\%)\times 4\%}=\frac{20}{419.2}\doteqdot 0.0477=4.77\%$

7.(A)(B)

【說明】$a=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.3\%)^4$

$=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+\frac{0.6}{100}+\frac{0.09}{10000})^4$

$b=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.4\%)^4\times(1+0.2\%)^4$

$=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+\frac{0.6}{100}+\frac{0.08}{10000})^4$

$c=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+0.2\%)^4\times(1+0.4\%)^4$

$=10\times(1+0.3\%)^4\times(1+\frac{0.6}{100}+\frac{0.08}{10000})^4$

$\therefore a>b$ 且 $a>c$

8.(C)(D)

【說明】令 $X$ 表平均風速，$Y$ 表氧化物最大濃度

由散布圖可得下表：

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | 35 | 36 | 38 | 40 | 40 | 42 | 42 | 43 | 43 | 45 | 47 | 47 | 48 | 48 |
| $Y$ | 24 | 18 | 21 | 17 | 23 | 20 | 23 | 23 | 25 | 17 | 11 | 20 | 5 | 11 |
| $X$ | 48 | 50 | 50 | 52 | 52 | 52 | 52 | 53 | 53 | 55 | 57 | 57 | 62 | 65 |
| $Y$ | 17 | 15 | 16 | 5 | 9 | 11 | 12 | 7 | 12 | 10 | 12 | 13 | 11 | 4 |

(A) $\because$ $Y$ 的算術平均數 $\overline{Y}=\dfrac{412}{28}\doteqdot 14.7$，又 $Y$ 的平方和$=7082$

$\therefore$ 該氧化物最大濃度的標準差 $S_Y \doteqdot \sqrt{\dfrac{1}{28-1}(7082-28\times 14.7^2)}=\sqrt{\dfrac{1031.48}{27}}$

$\doteqdot\sqrt{38.2}\doteqdot 6.2$

(B) $Y$的數據由小而大排之，得4，5，5，7，9，10，11，11，11，11，12，12，12，13，15，16，17，17，17，18，20，20，21，23，23，23，24，25

$\therefore$ 該氧化物最大濃度的中位數爲 $\dfrac{13+15}{2}=14$

(C) $X$的數據由小而大排之，得35，36，38，40，40，42，42，43，43，45，47，47，48，48，48，50，50，52，52，52，52，53，53，55，57，57，62，65

$\therefore$ 平均風速的中位數爲48

(D) 由散布圖可看出，以最小平方法決定數據集中直線趨勢的直線向右下降，故該直線的斜率小於0

三、選填題

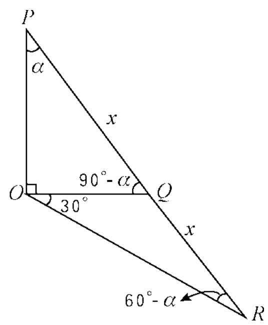
$A$.⑨ 3　⑩ 4

【說明】設 $\angle OPQ=\alpha$，則 $\angle PQO=90^\circ-\alpha$（$\because \angle POQ=90^\circ$）

$\because \angle QOR=30^\circ$　$\therefore \angle ORQ=(90^\circ-\alpha)-30^\circ=60^\circ-\alpha$

由於該物作等速直線運動　$\therefore \overline{PQ}=\overline{QR}$ 令其爲 $x$

於 $\Delta OQR$ 中，由正弦定理知 $\dfrac{\overline{OQ}}{\sin(60^\circ-\alpha)}=\dfrac{x}{\sin 30^\circ}$



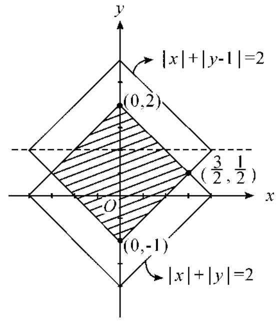
又 $\overline{OQ}=x\sin\alpha$　$\therefore (x\sin\alpha)\times\frac{1}{2}=x\times(\sin60^\circ\cos\alpha-\cos60^\circ\sin\alpha)$

$$=x\times(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)$$

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$　$\therefore 2\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\tan^2\angle OPQ=\tan^2\alpha=\frac{3}{4}$

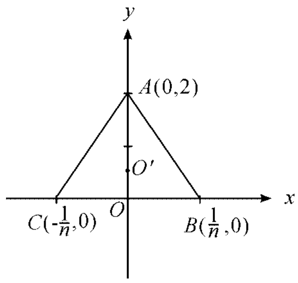
$B$.⑪ 9　⑫ 2




【說明】$\because |x|+|y-1|\le 2$ 的圖形係由 $|x|+|y|\le 2$ 向上平移 1 單位所得而 $\begin{cases}|x|+|y|\le 2\\|x|+|y-1|\le 2\end{cases}$ 表此兩圖形之交集，如右圖之斜線部分（點 $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ 係兩直線 $x+y=2$ 與 $x-(y-1)=2$ 之交點）

$\therefore$ 所圍區域的面積 $=2\{\frac{1}{2}\times[2-(-1)]\times\frac{3}{2}\}=\frac{9}{2}$

$C$.⑬ 2




【說明】$\because$ 此 $\Delta ABC$ 外接圓的圓心 $O'$ 必在 $\overline{BC}$ 的中垂線即 $y$ 軸上

$\therefore$ 可設此外接圓的圓心 $O'$ 的座標爲 $(0,k)$

$\because \overline{O'A}=\overline{O'B}$　$\therefore 2-k=\sqrt{(0-\frac{1}{n})^2+(k-0)^2}$

$\therefore 4-4k+k^2=\frac{1}{n^2}+k^2$　$\therefore 4k=4-\frac{1}{n^2}$

$\therefore k=1-\frac{1}{4n^2}$

$\therefore$ 外接圓的直徑 $D_n=2\overline{O'A}=2[2-(1-\frac{1}{4n^2})]=2(1+\frac{1}{4n^2})=2+\frac{1}{2n^2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}D_n=2+0=2$

第貳部分：

*1.* 袋中有 5 個黑球

【說明】設袋中有 $x$ 個黑球，則由袋中一次取出兩球均爲白球的機率 $=\frac{C_2^7}{C_2^{7+x}}=\frac{7}{22}$

$$\therefore \frac{\frac{7\times6}{2\times1}}{\frac{(7+x)(6+x)}{2\times1}}=\frac{7\times6}{(7+x)(6+x)}=\frac{7}{22}$$

$\therefore (7+x)(6+x)=6\times 22=12\times 11$

$\because x\in N$　$\therefore 7+x$，$6+x$ 均$\in N$　$\therefore 6+x=11$　$\therefore x=5$

故袋中有 5 個黑球

2. $-1<m<1$

【說明】設 $f(x)=3x^4-4mx^3+1$，則 $f'(x)=12x^3-12mx^2=12x^2(x-m)$

⑴ $m=0$ 時，$f'(x)=12x^3$

$\therefore f(x)$ 於 $x=0$ 處有最小值 1

$\therefore f(x)=0$ 無實數解

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ |

⑵① $m>0$ 時

$\therefore f(x)$ 於 $x=m$ 處有最小值 $f(m)$

| $x$ | | 0 | | $m$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | | ↗ |

② $m<0$ 時

$\therefore f(x)$ 於 $x=m$ 處有最小值 $f(m)$

| $x$ | | $m$ | | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↗ |

由①②知欲使 $f(x)=0$ 無實數解須

$f(m)>0$（即 $y=f(x)$ 的圖形與 $x$ 軸不相交）

$\therefore 3m^4-4m^4+1>0$　$\therefore m^4-1<0$　$\therefore (m^2+1)(m^2-1)<0$

$\because m^2+1>0$　$\therefore m^2-1<0$　$\therefore (m-1)(m+1)<0$

$\therefore -1<m<1$，但 $m\neq 0$

由⑴⑵知 $-1<m<1$