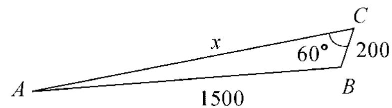
貳．92 學年度指定科目考試（數學甲）詳解

一、單一選擇題

1.(B)

【解析】設 $\overline{AC} = x$ 公尺



由餘弦定理知

$1500^2 = x^2 + 200^2 - 2 \cdot 200 \cdot x \cdot cos60^\circ$

$\Rightarrow \quad x^2 - 200x - (1700 \times 1300) = 0$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{200 \pm \sqrt{40000 + 4 \times 1700 \times 1300}}{2}$$

$$= \frac{200 \pm 200\sqrt{1 + 17 \times 13}}{2}$$

$= 100 \pm 100\sqrt{222}$（負不合）

又 $\sqrt{222} \doteqdot 15$（最接近 15）

$\therefore x \doteqdot 1500 + 100 = 1600$ 公尺

2.(C)

【解析】$\because \dfrac{\text{高收入人口}}{\text{低收入人口}}=\dfrac{2}{1}$（維持固定）

$\therefore$高收入轉變成低收入人口＝低收入轉變成高收入人口

設全國人口數爲 t

$\therefore \dfrac{\frac{2}{3}t\times\frac{4}{10}}{\frac{1}{3}t}=\dfrac{8}{10}$　$\Rightarrow$　低收入轉變成高收入約 8 成

二、多重選擇題

3.(A)(B)(D)

【解析】$L: y=-\sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad tan\theta=-\sqrt{3}$

$cos2\theta=\dfrac{1-(-\sqrt{3})^2}{1+(-\sqrt{3})^2}=-\dfrac{1}{2}$，$sin2\theta=\dfrac{2(-\sqrt{3})}{1+(-\sqrt{3})^2}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\because AB=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}，B=A^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \therefore B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

(A) $BA=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=AB$

(B) $A+B=0$

(C) B 不爲旋轉矩陣

(D) $-A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore -A=B^{-1}$

4.(A)(B)(C)

【解析】$1.253\times10^{845}<7^{1000}<1.254\times10^{845}$

$\Rightarrow\quad log1.253+845<1000log7<log1.254+845$

(A) $log7<\dfrac{log1.254}{1000}+0.845$

$\because log1.254<log10=1$

$\therefore log7<\dfrac{log1.254}{1000}+0.845<\dfrac{1}{1000}+0.845<0.846$

(B) $log7>\dfrac{log1.253}{1000}+0.845$

$\because \dfrac{log1.253}{1000}>0$

$\therefore log7>\dfrac{log1.253}{1000}+0.845>0.845$

(C)由(A)知

$log7<0.846\quad\Rightarrow\quad 100log7<84.6$

$\Rightarrow\quad log7^{100}<84.6\quad\Rightarrow\quad 7^{100}<10^{84.6}=10^{84}\times10^{0.6}$

$\therefore 7^{100}<10^{84}\times10^{\frac{3}{5}}=10^{84}\times\sqrt[5]{1000}<10^{84}\times\sqrt[5]{3125}=5\times10^{84}$

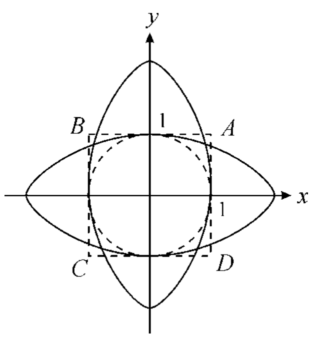
$\therefore 7^{100}<5\times10^{84}$

(D) $log7>0.845$，$7^{10}>10^{8.45}=10^{8}\times10^{0.45}>10^{8}\times10^{log2}$

$\therefore 7^{10}>2\times10^{8}$

5.(A)(B)(C)(D)

【解析】如右圖



(A) A_n的面積＜正方形 $ABCD$

$\therefore A_n$面積＜4

(B) A_n的面積＞內切圓面積

$\therefore A_n$面積＞π

(C) A_n周長＞圓周長

$\therefore A_n$周長＞$2\pi\times1\doteqdot6.28>5$

(D)當 n 趨近∞時，共同部分 A_n會非常接近正方形 $ABCD$

$\therefore A_n$面積便趨近於 4

6. (A)(C)

【解析】$\begin{cases} 19a+12b=31 \\ 13a+10b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

$\therefore$ 目標函數 $f(x,y)=x+y$

(x,y)	$x+y$	
$(17,13)$	30	最大值
$(16,11)$	27	
$(13,10)$	23	最小值

7. (A)(B)

【解析】$2+4+4+5+5+6+7+8+11+x+y=66$

$\therefore x+y=14$

$\because$ 中位數爲 6 且 $x<y \Rightarrow x=6$，$y=8$

$\therefore y<9$

$S=\sqrt{\frac{1}{10}(16+4+4+1+1+0+1+4+25+0+4)}=\sqrt{4}=2$

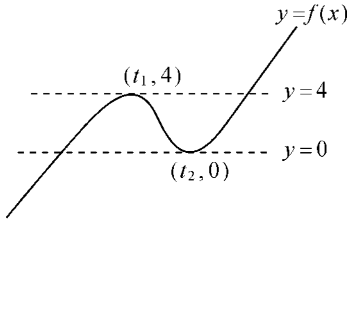
8. (A)(B)(D)

【解析】由題意知：

⑴當 $k<0$ 或 $k>4$ 時，$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$ 兩圖形只有一個交點

⑵當 $0<k<4$ 時，$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$ 兩圖形有三個交點

圖形如右，



設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x-t_1)(x-t_2)$

(A) $f'(x)=0$ 的二根爲 t_1、t_2，

又 $f(t_1)=4$，$f(t_1)-4=0$

$\therefore t_1$ 是 $f(x)-4=0$ 與 $f'(x)=0$ 的共同根

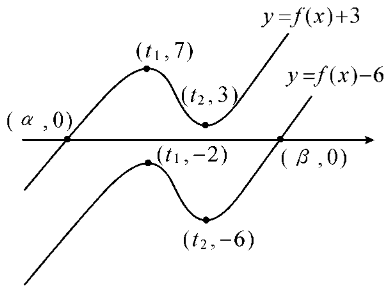
(B)又 $f(t_2)=0$　$\therefore t_2$ 是 $f(x)=0$ 與 $f'(x)=0$ 的共同根

(C)如圖㈠知

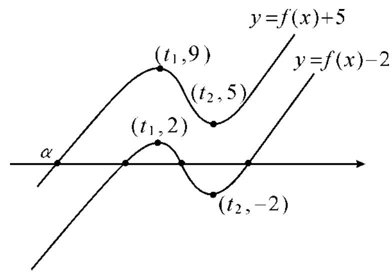
$f(x)+3=0$ 的根 α 小於 $f(x)-6=0$ 的根 β

(D)如圖(二)知

$f(x)+5=0$ 的根 α 恆小於 $f(x)-2=0$ 的任一實根



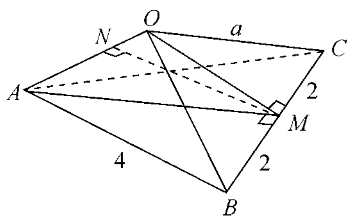
圖(一)



圖(二)

三、選填題

A.⑨ 8　⑩ 3



【解析】$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=a$

ΔOMC 中，$\angle OMC=90^\circ$

$\overline{OM}=\sqrt{a^2-4}$，$\overline{ON}=\sqrt{\overline{OM}^2-\overline{MN}^2}=\sqrt{a^2-7}$

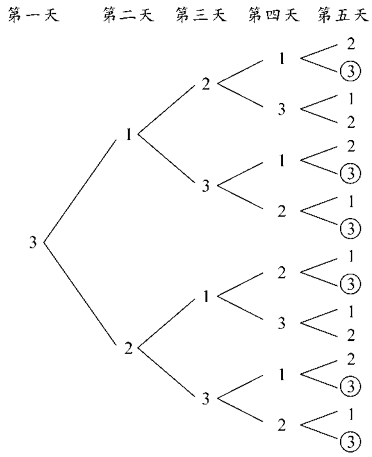
又 ΔABM 中，$\angle AMB=90^\circ$

$\overline{AM}=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$，$\overline{AN}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{MN}^2}=\sqrt{12-3}=3$

$\overline{AN}+\overline{NO}=a \quad\Rightarrow\quad 3+\sqrt{a^2-7}=a \quad\Rightarrow\quad \sqrt{a^2-7}=a-3$

$\Rightarrow\quad a^2-7=a^2-6a+9 \quad\Rightarrow\quad 6a=16 \quad \therefore a=\dfrac{8}{3}$

B.⑪ 3　⑫ 8



【解析】由樹形圖知：

第五天號碼爲 3 的機率爲 $\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

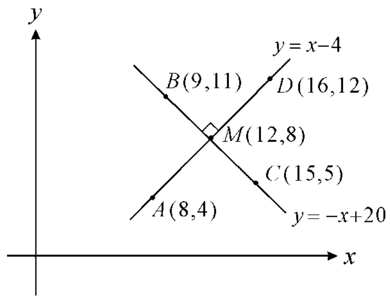
C.⑬ 5　⑭ 0

【解析】如下頁圖，$A(8, 4)$，$B(9, 11)$，

$C(15, 5)$，$D(16, 12)$

$\overleftrightarrow{AD}$：$y=x-4$，$\overleftrightarrow{BC}$：$y=-x+20$

$\overleftrightarrow{AD}$ 垂直 $\overleftrightarrow{BC}$，且交點爲 $M(12, 8)$



⑴若 A、D 爲兩焦點，B、C 爲兩頂點時：

$\overline{BM} = 3\sqrt{2}$，$\overline{DM} = 4\sqrt{2}$，

長軸之半 $=\sqrt{18+32}=\sqrt{50}$

⑵若 B、C 爲兩焦點，A、D 爲兩頂點時：

長軸之半 $=\sqrt{18+32}=\sqrt{50}$

由⑴⑵知，橢圓之半長軸長度 $=\sqrt{50}$

D.⑮ 8

【解析】$x^2+2xy+y^2-2x+6y+1=0$

$\delta = 4-4=0 \quad \Rightarrow \quad$ 先轉軸

$cot2\theta=\dfrac{a-c}{b}=0 \quad \therefore \theta=\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} a'+c'=a+c=2 \\ a'-c'=\sqrt{b^2+(a-c)^2}=2 \end{cases} \Rightarrow \quad a'=2，c'=0$$

又 $d'=d\,cos\theta+e\,sin\theta=2\sqrt{2}$，$e'=-d\,sin\theta+e\,cos\theta=4\sqrt{2}$

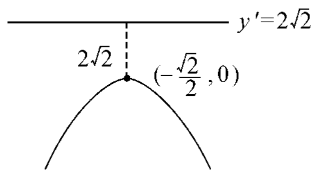
$\therefore$新方程式爲 $2x'^2+2\sqrt{2}x'+4\sqrt{2}y'+1=0$…拋物線

在直線 $x-y+4=0$ 上取兩點 $A(-4, 0)$、$B(0, 4)$

轉軸後，$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \therefore A'(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

$\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \therefore B'(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

直線新方程式爲 $y'=2\sqrt{2}$



又拋物線配方 $\quad \Rightarrow \quad y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}x'^2-\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

得 $y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}(x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$，頂點 $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)$

$\therefore$拋物線上任一點到直線的最短距離爲 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$