第壹部分

一、單一選擇題

1.(C)

【說明】由題意知

$x^5-1=0$ 的五個根爲 1，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4

又 $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

∴ 方程式 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的四個根爲 ω_1，ω_2，ω_3，ω_4

可得 $x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\omega_1)(x-\omega_2)(x-\omega_3)(x-\omega_4)$

將 $x=3$ 代入

得 $(3-\omega_1)(3-\omega_2)(3-\omega_3)(3-\omega_4)=3^4+3^3+3^2+3+1=121$

二、多重選擇題

2.(C)(D)

【說明】(1)取 log，$log10^9=9$

$log9=10\times log9=20\times log3=9.542$

∴ $log10^9<log9^{10}\quad\Rightarrow\quad 10^9<9^{10}$

(2)取 log，$log10^{12}=12$

$log12^{10}=10\times log12=10\times(2log2+log3)=10.791$

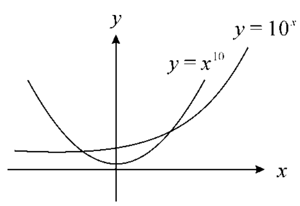
∴ $log10^{12}>log12^{10}\quad\Rightarrow\quad 10^{12}>12^{10}$

(3)取 log，$log10^{11}=11$

$log11^{10}=10\times log11<10\times log12=10.791$

∴ $log10^{11}>log11^{10}\quad\Rightarrow\quad 10^{11}>11^{10}$

(4) $\begin{cases} y=10^x \\ y=x^{10} \end{cases}$ 兩圖形如右

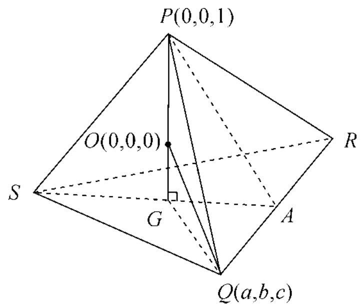


兩圖形在 $x<0$ 處有一個交點

∴ 方程式 $10^x=x^{10}$ 有一負根

3.(B)(D)

【說明】設正四面體的邊長為 x



$\overline{QR}=x$，$\overline{AQ}=\frac{1}{2}x$，$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

$\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$

ΔAPG 中，$\overline{AP}^2=\overline{AG}^2+\overline{PG}^2$

$\therefore\ \overline{PG}=\frac{\sqrt{6}}{3}x$

ΔOGQ 中，$\overline{OG}=\frac{\sqrt{6}}{3}x-1$，$\overline{OQ}=1$，$\overline{GQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$\overline{OQ}^2=\overline{OG}^2+\overline{GQ}^2\quad\therefore\ x=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\overline{OG}=\frac{1}{3}$

(A) $\overrightarrow{OP}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{OQ}=(a,b,-\frac{1}{3})$，設 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OQ}$ 的夾角為 θ

$cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=-\frac{1}{3}$，又 $cos120^\circ=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta<120^\circ$

(B) $\overline{OQ}^2=a^2+b^2+c^2=1$，又 $c=-\frac{1}{3}\quad\therefore\ a^2+b^2=\frac{8}{9}$

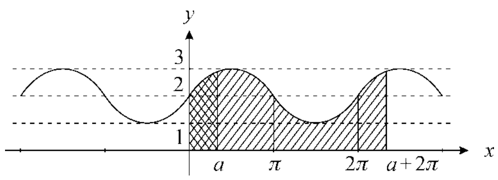
$\therefore\ a^2+b^2>c^2$

(C) $ab>0$ 不一定成立

(D) $c=-\frac{1}{3}\quad\therefore\ c<0$

4.(C)(D)

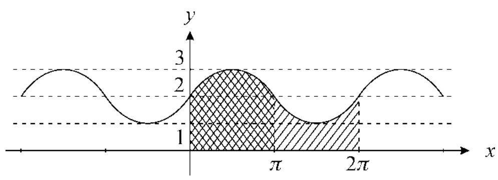
【說明】(A)



由圖形，可明顯得知

$A(a+2\pi)\neq A(a)$

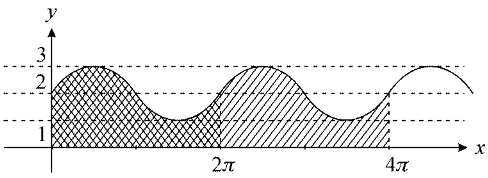
(B)



由圖形，可明顯得知

$A(2\pi)\neq 2A(\pi)$

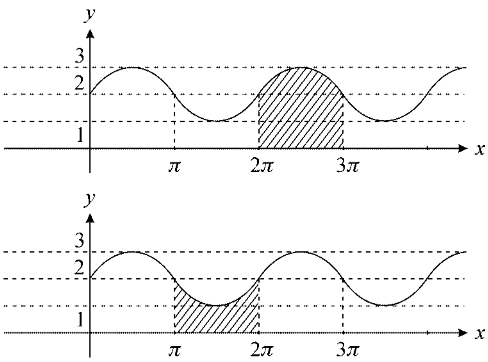
(C)



由圖形，可明顯得知

$A(4\pi)=2A(2\pi)$ 成立

(D)



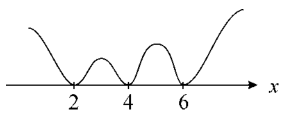
比較兩圖斜線面積

可明顯得知

$A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

5. (A)(D)

【說明】(A)由勘根定理知



方程式 $f(x)=0$ 在 $x=2$，4，6 處各有二重根

$\therefore f(x)=0$ 有 6 個實根，$f(x)=0$ 至少有 6 個根

多項式 $f(x)$ 的次數至少為 6

(B)多項式 $f(x)$ 的次數為奇數——不成立

$\because f(x)=0$ 實根有 6 個，虛根有偶數個　$\therefore f(x)$ 的次數為偶數

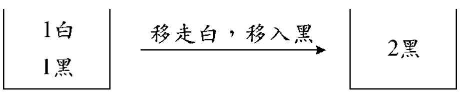
(C) $f(1)$ 為奇數——不一定成立

(D) $f(x)=0$ 的圖形在 $x=4$ 處有水平切線　$\therefore f'(4)=0$

三、題組

6. (A)

【說明】



$\therefore$ 機率 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

7. (B)(D)

【說明】$P_{11}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P_{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_{13}=0$

$P_{21}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，$P_{22}=(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$P_{23}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P_{31}=0$，$P_{32}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P_{33}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 矩陣 $P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(A) $P_{ij}=P_{ji}$ 不成立，例如 $P_{12}=\frac{1}{4}$，$P_{21}=\frac{1}{2}$　$\therefore P_{12}\neq P_{21}$

(B)矩陣 P 的每一行之和皆為 1　$\therefore P$ 為轉移矩陣

(C)不成立，$\because\ detP=\frac{1}{8}+0+0-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0$

(D) $P_{11}=\frac{1}{2}$，$P_{33}=\frac{1}{2}$　$\therefore P_{11}=P_{33}$

8. (A)(B)(C)

【說明】$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(A)由狀態 2 開始：

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{matrix}\longleftarrow \text{狀態 1}\\ \longleftarrow \text{狀態 2}\\ \longleftarrow \text{狀態 3}\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$\vdots$

$\therefore$ 經過 k 次操作後，變成狀態 1 的機率與變成狀態 3 的機率相等，均為 $\frac{1}{4}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ P^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix},\ P^3 = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{5}{16} \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} \frac{9}{32} & \frac{1}{4} & \frac{7}{32} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{32} & \frac{1}{4} & \frac{9}{32} \end{bmatrix} \cdots P^k = \begin{bmatrix} a_k & \frac{1}{4} & b_k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ c_k & \frac{1}{4} & d_k \end{bmatrix},$$

其中 $$\begin{cases} a_k = d_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \cdots - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ \qquad (k \geq 2) \\ b_k = c_k = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$$

(B) $$\begin{bmatrix} a_k & \frac{1}{4} & b_k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ c_k & \frac{1}{4} & d_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ \frac{1}{2} \\ c_k \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \text{狀態 1} \\ \\ \longleftarrow \text{狀態 3} \end{matrix}$$

$a_k > c_k$，所以成立

(C) $\begin{bmatrix} a_k & \frac{1}{4} & b_k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ c_k & \frac{1}{4} & d_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ \frac{1}{2} \\ c_k \end{bmatrix}$ ⟵ 狀態 1

$a_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{k+1}}$，（$k \geq 2$），$a_k < a_{k-1} < a_{k-2} < \cdots < a_2$，所以成立

(D)經過 k 次操作後，狀態 2 恆爲 $\frac{1}{2}$，不會趨近 $\frac{1}{3}$　∴ 不成立

四、選填題

$A.-2$

【說明】轉軸 $\frac{\pi}{4}$：

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \text{代入}$$

$$\therefore 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + a\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left(2+\frac{a}{2}\right)x'^2 + \left(2-\frac{a}{2}\right)y'^2 = 1$$

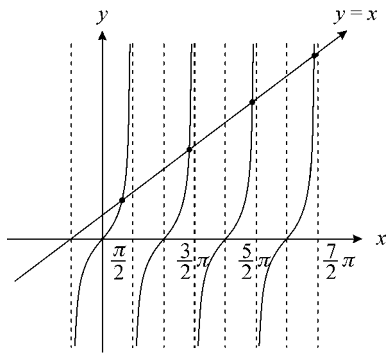
$$\Rightarrow \frac{x'^2}{\frac{2}{4+a}} + \frac{y'^2}{\frac{2}{4-a}} = 1$$

又 $x^2+y^2 \leq 1$ 經轉軸 $\frac{\pi}{4}$ 後　$\Rightarrow$　$x'^2+y'^2 \leq 1$

依題意知 $\frac{x'^2}{\frac{2}{4+a}} + \frac{y'^2}{\frac{2}{4-a}} = 1$ 在 $x'^2+y'^2=1$ 圓內（或圓上）

$$\begin{cases} 0 < \frac{2}{4+a} \leq 1 \Rightarrow \frac{4+a}{2} \geq 1 \Rightarrow a \geq -2 \\ 0 < \frac{2}{4-a} \leq 1 \Rightarrow \frac{4-a}{2} \geq 1 \Rightarrow a \leq 2 \end{cases}$$

$\therefore -2 \leq a \leq 2$，$a$ 的最小可能值爲-2



B. 3.14

【說明】n 趨近 ∞時，x_n 趨近 $\frac{2n-1}{2}\pi$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\pi \fallingdotseq 3.14$

第貳部分：非選擇題

一、$-1+\sqrt{2}$

【說明】$\begin{cases}(1+cos\theta)x-y=0\\ -x+(1+sin\theta)y=0\end{cases}$ 不只一組解

$\Rightarrow$ 即無限多解

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1+cos\theta & -1\\ -1 & 1+sin\theta\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1+sin\theta)(1+cos\theta)=1$

$\therefore sin\theta+cos\theta+sin\theta cos\theta=0$

令 $sin\theta+cos\theta=t \Rightarrow sin\theta\cdot cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$ 代入

$t+\frac{t^2-1}{2}=0 \quad \therefore t=-1\pm\sqrt{2}$

又 $t=sin\theta+cos\theta=\sqrt{2}sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

$\therefore -\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$\therefore t=-1+\sqrt{2}$，即 $sin\theta+cos\theta=-1+\sqrt{2}$

二、$(0, \frac{3}{2})$

【說明】點 $P(2, 0)$，焦點 $F(1, 2)$，準線 L：$kx+y+1=0$

由定義，$\overline{PF}=d(P, L) \Rightarrow \sqrt{1+4}=\frac{|2k+0+1|}{\sqrt{k^2+1}}$

$\therefore k^2-4k+4=0$，$k=2$

得 L：$2x+y+1=0$

軸的斜率$=\frac{1}{2}$，且過 $F(1, 2)$

$\therefore$ 軸方程式 $x-2y=-3$

準線與軸之交點 A，$\begin{cases}2x+y+1=0\\ x-2y+3=0\end{cases} \Rightarrow x=-1$，$y=1$，$A(-1, 1)$

$\overline{AF}$ 之中點 $(0, \frac{3}{2})$ 就是頂點